

Jede einparametrische Schar von Transformationen, unter denen die Wirkung invariant ist, führt zu einer Erhaltungsgröße!

Zur Erinnerung:

Falls

$$\frac{\partial L(q_1)}{\partial q_1} = 0$$

(1) (q_1 ist zyklisch), gilt:

(i) generalisierter Impuls erhalten:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} \stackrel{(1)}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \Rightarrow \quad (2)$$

(ii) L "invariant" unter Verschiebung von q_1 (Funktionale Form ändert sich nicht)

Betrachte Transf.: $q_1 = q_1(q'_1, \varepsilon) = \quad, (3a) \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_1(\dot{q}'_1) \stackrel{d}{dt}(3a) = \quad (3b)$

Transformierte Lagrange-Fkt: $L(q_1, \dot{q}_1) \stackrel{(3)}{=} L(\quad, \quad) \stackrel{(1)}{=} \quad (4)$

alte Koord., ausgedrückt durch neue Koord. [da L nicht von q_1 abhängt, (c)]

Fazit: L' hat dieselbe funktionale Form wie L (dieselbe Abhängigkeit von seinen Koordinaten) $\square$

Zentrale Idee heute: Erhaltungsgröße $\iff q_1$ zyklisch $\Rightarrow$ Invarianz von L

Frage:

Gibt es einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Transf., die Lagrange-Fn. invariant lassen, und Erhaltungsgrößen?

L81

Satz: Noethersches Theorem

Gegeben sei eine ein-eindeutige Koordinatentransformation,

$$q_k = \quad \quad \quad k = 1, \dots, f \quad (1)$$

$$\dot{q}'_k = \quad \quad \quad k = 1, \dots, f \quad (2)$$

in einem kontinuierlich veränderlichen, differenzierbarem Parameter

Für $\varepsilon = 0$ sei diese Transformation die Identität. Wenn die Lagrange-Fn. unter dieser Transf. invariant ist, gibt es eine Erhaltungsgröße (Integral der Bewegung):

$$I(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} \quad (3)$$

Beispiel: Rotation um z-Achse für:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

hängt nur vom Abstand zur z-Achse ab

(1)

L82

i) Zugang über kartesische Koord:

Betrachte Rotation um z-Achse:

$$x =$$

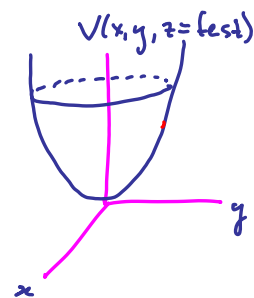
(2a)

$$y =$$

(2b)

$$z =$$

(2c)



Def. transformierte Lagrange-Funktion:

$$L'(q', \dot{q}'; t, \varepsilon) \stackrel{(80.3)}{:=} L(q(q', \varepsilon), \dot{q}(\dot{q}', q', t, \varepsilon))$$

(3)

$$= \frac{m}{2} \left[\overbrace{\left(\dot{x}^2 \right)} + \overbrace{\left(\dot{y}^2 \right)} + \overbrace{\left(\dot{z}^2 \right)} \right] - V \left(\overbrace{x^2} + \overbrace{y^2}, \overbrace{z}, t \right)$$

selber nachrechnen



$$= \frac{m}{2} \left(\quad \right) - V(\quad, \quad, t) \stackrel{(1)}{=} \quad \quad (4)$$

Fazit:

$$L'(q', \dot{q}', t, \varepsilon) =$$

invariant unter Rot. um z-Achse! ⁽⁵⁾

Erhaltungsgröße:

$$I(q, \dot{q}) \stackrel{(81.3)}{=} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0}$$

L83

(1)

(82.2)

$$x = x' \cos \varepsilon + y' \sin \varepsilon$$

$$y = -x' \sin \varepsilon + y' \cos \varepsilon$$

$$z = z'$$

$$\frac{\partial x(q', \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} =$$

(2)

$$\frac{\partial y(q', \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} =$$

(3)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \quad, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} =$$

$$I \stackrel{(1)}{=} \quad$$

(4)

Drehimpuls um z-Achse

ii) Zugang über Zylinder-Koord:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (5)$$

$$L = \quad (6)$$

Generalisierter Impuls:

$$\text{const} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \quad (7)$$

oder: Invarianz unter

$$I =$$

(8)

$$\varphi = \quad :$$

Beweis des Noetherschen Satzes: (verallg. von (80.4))

$$q = (q_1, \dots, q_f)$$

L 84

Def. transformierte
Lagrange-Funktion:

$$L(q, \dot{q}, t) \quad (1)$$

Einerseits: Betrachte:

$$\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} = \sum_{k=1}^f \left[\quad + \quad \right] \quad (2)$$

$$= \left[\sum_{k=1}^f \quad \right] \quad \left[\begin{array}{l} \text{gilt für alle } \varepsilon, \\ \text{also auch für} \\ \text{erleichtert die} \\ \text{Analyse} \end{array} \right] \quad (3)$$

Andrerseits: Invarianz
der Lagrange-Fn bedeutet:

$$L'(q', \dot{q}', t; \varepsilon) = L(q', \dot{q}', t) \quad [L' \text{ hat dieselbe funktionale Form wie } L] \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} \stackrel{(4)}{=} \quad [denn L \text{ hängt nicht von } \varepsilon \text{ ab}] \quad (5)$$

$$(3) = (5)$$

$$I(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \quad (6)$$

Erweitertes Noether-Theorem:

L 85

Wenn sich die Lagrange-Fn. unter der Koord.Transf. um eine Eichtr. verändert,

$$L'(q', \dot{q}', t, \varepsilon) = L(q', \dot{q}', t) \quad (1)$$

lautet die Erhaltungsgröße:

$$\tilde{I}(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \underbrace{\frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}}_{(81.5)} \Big|_{\varepsilon=0} \quad (2)$$

Beweis: analog zum vorigen Beweis:

$$(1): \quad L'(q', \dot{q}', t, \varepsilon) - \frac{d}{dt} M(q'; t, \varepsilon) \stackrel{(1)}{=} L(q', \dot{q}', t) \quad (3)$$

[denn L hängt nicht von ε ab]

$$= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k(q'; t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \quad \left[\begin{array}{l} \text{gilt für alle } \varepsilon, \\ \text{also auch für} \end{array} \right] \quad (4)$$

$$(4) = (3) \quad \Rightarrow$$

$$(5)$$

Beispiel: Freier Fall im Schwerfeld:

$$L(z, \dot{z}) = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - mgz \quad (1)$$

L86

Betrachte Galileo-Transf: $z =$

(2)

Def. transformierte
Lagrange-Funktion:

$$L(z, \dot{z})$$

(3)

$$= \frac{m}{2} \dot{z}'^2 - mgz' - \varepsilon m \dot{z}' + \frac{m}{2} \varepsilon^2 + mg\varepsilon t$$

(4)

=

(5)

Erhaltungsgröße:

$$\tilde{I}(z, \dot{z}) \stackrel{(85.2)}{=} \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \frac{\partial (\quad)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} - \left. \frac{\partial M(z', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (6)$$

(7)

=

Ist (7) wirklich konstant? Check mittels Lösung d. Bewegungsgl.: $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + vt + z_0$ (8)

$$\tilde{I}(z, \dot{z}) = m \left[\quad - t(\quad) - \frac{1}{2}gt^2 \right]$$

In diesem Fall ist die erhaltene Größe

Bemerkungen:

L87

1) Lagrange-Mechanik: kont. Symmetrie liefert Erhaltungsgröße;
aber Umkehrung erst in der Hamiltonschen Mechanik gültig

2) I ist im Prinzip Funkt. von $\quad$ aber $\quad$ -Abhängigkeit bringt keine neue
Information. Deswegen immer nur Betrachtung von
Deshalb reicht tatsächlich schon Invarianz unter infinitesimal Transf. wobei
Terme vernachlässigt werden.

Im Beispiel von (82.2):

$$x =$$

(1)

$$y =$$

$$z =$$

$$L'(q', \dot{q}', t, \varepsilon) := L(q(\dot{q}', \varepsilon), \dot{q}(\dot{q}', \varepsilon))$$

(2)

+ $O(\varepsilon^2)$

$$= \frac{m}{2} [(\dot{x}' + \dot{y}'\varepsilon)^2 + (\dot{y}' - \dot{x}'\varepsilon)^2 + \dot{z}'^2] - V((x' + y'\varepsilon)^2 + (y' - x'\varepsilon)^2, z')$$

selber nachrechnen

$$\stackrel{\text{selber nachrechnen}}{=} \frac{m}{2} [\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2] - V(x'^2 + y'^2, z') + O(\varepsilon^2)$$

$$= L(q', \dot{q}') + O(\varepsilon^2)$$

(3)

deswegen ist Noether-Theorem anwendbar mit Erhaltungsgröße:

L88

$$\begin{aligned} x &= x' + \varepsilon y' \\ y &= y' - \varepsilon x' \end{aligned} \quad I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x(x', y'; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y(x', y'; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \quad (1)$$

(2)

3) Das Noether-Theorem gilt nicht für Transf., die nicht von einem kontinuierlichen Parameter abhängen. Beispiel Koordinatenspiegelung: (3)

Bisher war Zeitabhängigkeit ausgeklammert. (4b)

Satz: Lagrange-Fn. sei unter Zeittransl. invariant: $L(q, \dot{q}; t) = L(q, \dot{q}; \quad)$ (4a)

Dann ist $\tilde{I} = \quad$ eine Erhaltungsgröße. (5)

(Bemerkung: für skleronome Zwangsbedingungen wird I später zur Hamiltonfn.)

Beweis: $\frac{d}{dt} L = \sum_{k=1}^f \left[\quad \right] \quad (6)$

$\Rightarrow$

(7)

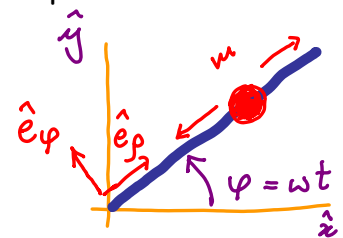
Für zeitunabhängige Potenziale aber rheonome(zeitabhängige) Zwangsbed., liefert obiger Satz eine Erhaltungsgröße, die aber nicht als Energie zu interpretieren ist:

L89

Beispiel: Perle auf rotierendem Stab Vorlesung 10, Seite L22):

$$x = \rho \cos \omega t, \quad y = \rho \sin \omega t \quad (1)$$

$$L = T = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \omega^2) \quad (2)$$



$$\begin{aligned} \tilde{I} &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \\ \tilde{I} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \dot{\rho} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \quad (3) \end{aligned}$$

Check:

Ist I wirklich konstant? Nutze Lösung d. Bewegungsgl: $\rho(t) = \rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t}$ (L24.4) (4)

$$\begin{aligned} \tilde{I} &\stackrel{(3)}{=} \frac{m}{2} \left[\omega^2 (-\rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t})^2 - \omega^2 (\rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t})^2 \right] \quad (5) \\ &= \end{aligned}$$

Energie kann hier keine Erhaltungsgröße sein, da Zwangskraft Arbeit verrichtet!