Noether-Theorem (wichtig für QM, QFT)

V17 – 10.6.08

Jede einparametrische Schar von Transformationen, unter denen die Wirkung invariant ist, führt zu einer Erhaltungsgrösse!

Zur Erinnerung: Falls $\frac{\partial L(q_1)}{\partial q_1} = 0$ (1) (q_1 ist zyklisch), gilt:

(i) generalisierter Impuls erhalten: $0 = \frac{\partial L}{\partial q_1} \overset{(Lg2)}{=} \frac{d}{dt} \overbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_1}}^{p_1} \Rightarrow \dot p = 0 \Rightarrow p_1 = \text{konst.}$ (2)

(ii) L "invariant" unter Verschiebung von (Funktionale Form ändert sich nicht)

Betrachte Transf.: $q_1 = q_1(q_1', \varepsilon) = q_1' - \varepsilon$, (3a) ← zeitunabhängig $\qquad \dot q_1 = \dot q_1(\dot q_1') \overset{\frac{d}{dt}(3a)}{=} \dot q_1'$ (3b)

Transformierte Lagrange-Fkt: $L'(q_1', \dot q_1') := L(q_1(q_1', \varepsilon), \dot q_1(\dot q_1')) \overset{(3)}{=} L(q_1' - \varepsilon, \dot q_1') \overset{(1)}{=} L(q_1', \dot q_1')$ (4)

alte Koord., ausgedrückt durch neue Koord. $\qquad$ [da L nicht von q_1 abhängt, (1)]

Fazit: L' hat dieselbe funktionale Form wie L $\Leftrightarrow$ "L ist invariant" □
(dieselbe Abhängigkeit von seinen Koordinaten)

Zentrale Idee heute: Erhaltungsgröße $\overset{(i)}{\Longleftarrow}$ q_1 zyklisch $\overset{(ii)}{\Longrightarrow}$ Invarianz von L

$\Longleftarrow$ NOETHER

Frage: Gibt es einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Transf., die Lagrange-Fn. invariant lassen, und Erhaltungsgrößen?

Satz: Noethersches Theorem

Gegeben sei eine ein-eindeutige Koordinatentransformation,

$$q_k = q_k(q_1', \dots, q_f'; t, \varepsilon) \qquad k = 1, \dots, f \qquad (1)$$

$$q_k' = q_k'(q_1, \dots, q_f; t, \varepsilon) \qquad k = 1, \dots, f \qquad (2)$$

in einem kontinuierlich veränderlichen, differenzierbarem Parameter ε.
Für $\varepsilon = 0$ sei diese Transformation die Identität. Wenn die Lagrange-Fn. unter dieser Transf. invariant ist, gibt es eine Erhaltungsgröße (Integral der Bewegung):

$$I(q, \dot q) = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon = 0} \qquad (3)$$

$$L'(q', \dot q', t, \varepsilon) := L(q(q', t, \varepsilon), \dot q(q', \dot q', t, \varepsilon)) = L(q', \dot q') \qquad (4)$$

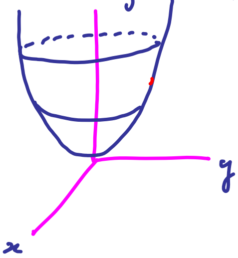
Definition von L' $\qquad$ Annahme der Invarianz

Beispiel: Rotation um z-Achse für:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) - V(\underbrace{x^2+y^2}, z, t) \qquad (1)$$

hängt nur vom Abstand zur z-Achse ab, nicht vom Winkel

$V(x,y,z=\text{fest})$



$\boxed{L82}$

i) Zugang über kartesische Koord:

Betrachte Rotation um z-Achse:

$$x = x'\cos\varepsilon + y'\sin\varepsilon \qquad (2a)$$
$$y = -x'\sin\varepsilon + y'\cos\varepsilon \qquad (2b)$$
$$z = z' \qquad (2c)$$

$\varepsilon = 0 \Rightarrow x = x',\ y = y',\ z = z'$ ✓

Def. transformierte Lagrange-Funktion:

$$L'(q', \dot{q}'; t, \varepsilon) \overset{(80.3)}{:=} L\left(q(q',\varepsilon), \dot{q}(\dot{q}', q_i, t, \varepsilon)\right) \qquad (3)$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{m}{2}\Big[\big(\overbrace{\dot{x}'\cos\varepsilon + \dot{y}'\sin\varepsilon}^{\dot{x}^2}\big)^2 + \big(\overbrace{-\dot{x}'\sin\varepsilon + \dot{y}'\cos\varepsilon}^{\dot{y}^2}\big)^2 + \big(\overbrace{\dot{z}'}^{\dot{z}^2}\big)^2\Big]$$
$$- V\Big(\big(\underbrace{x'\cos\varepsilon + y'\sin\varepsilon}_{x^2}\big)^2 + \big(\underbrace{-x'\sin\varepsilon + y'\cos\varepsilon}_{y^2}\big)^2, \underbrace{z'}_{z}, t\Big)$$

selber nachrechnen

$$\leadsto = \frac{m}{2}\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2\right) - V(x'^2 + y'^2, z', t) \overset{(1)}{=} L(q', \dot{q}', t) \qquad (4)$$

Fazit: $L'(q', \dot{q}', t, \varepsilon) = L(q', \dot{q}', t)$ $\Rightarrow$ invariant unter Rot. um z-Achse! (5)

$\boxed{L83}$

Erhaltungsgröße:

$$I(q, \dot{q}) \overset{(81.3)}{=} \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left.\frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \qquad (1)$$

(82.2)
$x = x'\cos\varepsilon + y'\sin\varepsilon$
$y = -x'\sin\varepsilon + y'\cos\varepsilon$
$z = z'$

$$\left.\frac{\partial x(q',\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left(-x'\sin\varepsilon + y'\cos\varepsilon\right)\big|_{\varepsilon=0} = y'\big|_{\varepsilon=0} = y \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial y(q',\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left(-x'\cos\varepsilon - y'\sin\varepsilon\right)\big|_{\varepsilon=0} = -x'\big|_{\varepsilon=0} = -x \qquad (3)$$

(82.1)
$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$

$$I \overset{(1)}{=} m\dot{x}y + m\dot{y}(-x) = -m(x\dot{y} - y\dot{x}) = -L_z \qquad (4)$$
$$= \text{Drehimpuls um } z\text{-Achse}$$

---

ii) Zugang über Zylinder-Koord:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z \qquad (5)$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - V(\rho^2, z, t) \Rightarrow \varphi \text{ ist zyklisch} \qquad (6)$$

(i) Generalisierter Impuls:

$$\text{const} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} = L_z \quad \left[\text{check: } \overset{(5)}{=} m(\dot{x}y - \dot{y}x)\right] \qquad (7)$$
$$= (-4)$$

(ii) oder: Invarianz unter $\varphi = \varphi' - \varepsilon$:

$$I \overset{(1)}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \left.\frac{\partial(\varphi' - \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = m\rho^2\dot{\varphi}(-1) = -(7) = (4) \qquad (8)$$

Beweis des Noetherschen Satzes: (verallg. von (80.4)) (siehe S. 2) $q = (q_1, \dots, q_f)$

Def. transformierte Lagrange-Funktion:

$$L'(q', \dot q', t, \varepsilon) = L\big(q(q', t, \varepsilon),\ \dot q(q', \dot q', t, \varepsilon),\ t\big) \qquad (1)$$

$\dot q = \frac{dq}{dt}$

Einerseits: Betrachte: Kettenregel

$$\left.\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \sum_{k=1}^{f}\Bigg[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)\ (\text{Lg2})}\frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\underbrace{\frac{\partial \dot q(q', \dot q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}}\Bigg]_{\varepsilon=0} \qquad (2)$$

$$= \frac{d}{dt}\underbrace{\left[\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\frac{\partial q(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}}_{\equiv I(q, \dot q)} \qquad (3)$$

[gilt für alle ε, also auch für $\varepsilon=0$; $\varepsilon=0$ erleichtert die Analyse]

Andrerseits: Invarianz der Lagrange-Fn bedeutet:

$$L'(q', \dot q', t; \varepsilon) \overset{(81.4)}{=} L(q', \dot q'; t) \qquad (4)$$

[L' hat dieselbe Funktionale Form wie L]

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} \overset{(4)}{=} \frac{\partial L(q', \dot q', t)}{\partial \varepsilon} = 0 \qquad (5)$$

[denn L hängt nicht von ε ab]

(3) = (5)

$$\frac{d}{dt} I = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I(q, \dot q) = \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\left.\frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \text{konst} \doteq \text{Erhaltungsgröße}} \qquad (6)$$

□

Erweitertes Noether-Theorem:

Wenn sich die Lagrange-Fn. unter der Koord.Transf. um eine Eichtr. verändert,

$$L'(q', \dot q'; t, \varepsilon) = L(q', \dot q'; t) + \frac{d}{dt} M(q', t, \varepsilon) \qquad (1)$$

lautet die Erhaltungsgröße:

$$\tilde I(q, \dot q) = \underbrace{\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\frac{\partial q_k(q'; t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}}_{(81.3)} - \left.\frac{\partial M(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \qquad (2)$$

Beweis: analog zum vorigen Beweis:

$$\left.\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(1)\right|_{\varepsilon=0}: \quad \underbrace{\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big[L'(q', \dot q'; t, \varepsilon) - \frac{d}{dt}M(q'; t, \varepsilon)\Big]}_{(84.3)}_{\varepsilon=0} \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(q', \dot q'; t)\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \qquad (3)$$

Annahme

[denn L hängt nicht von ε ab]

$$= \frac{d}{dt}\underbrace{\left[\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\frac{\partial q_k(q'; t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial M(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}}_{=: \tilde I(q, \dot q) = (2)} \qquad (4)$$

[gilt für alle ε, also auch für $\varepsilon=0$]

(4) = (3) $\quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\tilde I(q, \dot q) = 0 \qquad (5)$

□

L86

Beispiel: Freier Fall im Schwerfeld: $L(z,\dot z) = \frac{m}{2}\dot z^2 - mgz$ (1)

Betrachte Galileo-Transf: $z = z' - \varepsilon t$ (2)

Def. transformierte Lagrange-Funktion:

$$L'(z',\dot z',t,\varepsilon) := L(z(z',\varepsilon),\dot z(\dot z',\varepsilon)) \overset{(1)}{=} \frac{m}{2}(\overbrace{\dot z'-\varepsilon}^{\dot z})^2 - mg(z'-\varepsilon t) \quad (3)$$

$$= \underbrace{\frac{m}{2}\dot z'^2 - mgz'} - \varepsilon m\dot z' + \frac{m}{2}\varepsilon^2 + mg\varepsilon t \quad (4)$$

$$= L(z',\dot z')^{(1)} + \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{-m\varepsilon z' + \tfrac12 m\varepsilon^2 t + \tfrac12 mg\varepsilon t^2}_{=:M(z';t,\varepsilon)}\Big] \quad (5)$$

Erhaltungsgröße:

$$\tilde I(z,\dot z) \overset{(85.2)}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot z}\,\frac{\partial(z'-\varepsilon t)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial M(z';t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \quad (6)$$

$$= m\dot z(-t) - \Big[-m\overset{z+\cancel{\varepsilon t}}{z'} + m\cancel{\varepsilon}t + \tfrac12 mgt^2\Big]_{\varepsilon=0} = m(z - t\dot z - \tfrac12 gt^2) \quad (7)$$

Ist (7) wirklich konstant? Check mittels Lösung d. Bewegungsgl.: $z(t) = -\frac12 gt^2 + vt + z_0$ (8)

(8) in (7) einsetzen:

$$\tilde I(z,\dot z) \overset{(7)}{=} m\Big[\overbrace{-\cancel{\tfrac12 gt^2} + \cancel{vt} + z_0}^{8} - t(\cancel{-gt} + \cancel{v}) - \cancel{\tfrac12 gt^2}\Big] = mz_0 = \text{konst.}$$

In diesem Fall ist die erhaltene Größe eine der Anfangsbedingungen!

L87

Bemerkungen:

1) Lagrange-Mechanik: kont. Symmetrie liefert Erhaltungsgröße; aber Umkehrung erst in der Hamiltonschen Mechanik gültig

2) I ist im Prinzip Funkt. von ε aber ε-Abhängigkeit bringt keine neue Information. Deswegen immer nur Betrachtung von $\varepsilon \to 0$. Deshalb reicht tatsächlich schon Invarianz unter infinitesimal Transf. festzustellen wobei Terme $O(\varepsilon^2)$ vernachlässigt werden.

Im Beispiel von (82.2):

$$x = x' + y'\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (1)$$
$$y = y' - x'\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$
$$z = z'$$

$\sin\varepsilon \simeq \varepsilon$, $\cos\varepsilon \simeq 1$

$$L'(q',\dot q';t,\varepsilon) := L(q(q',\varepsilon),\dot q(q',\dot q';\varepsilon)) + O(\varepsilon^2) \quad (2)$$

$$= \frac{m}{2}\big[(\dot x' + \dot y'\varepsilon)^2 + (\dot y' - \dot x'\varepsilon)^2 + \dot z'^2\big] - V\big((x'+y'\varepsilon)^2 + (y'-x'\varepsilon)^2, z'\big)$$

selber nachrechnen

$$= \frac{m}{2}\big[\dot x'^2 + \dot y'^2 + \dot z'^2\big] - V(x'^2 + y'^2, z') + O(\cancel{\varepsilon}^2)$$

$$= L(q',\dot q') + O(\varepsilon^2) \quad (3)$$

deswegen ist Noether-Theorem anwendbar mit Erhaltungsgröße:

$$x = x' + \varepsilon y' \qquad y = y' - \varepsilon x'$$

$$I \overset{(80.3)}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x(x',y';\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y(x',y';\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \qquad (1)$$

$$= m\dot{x}\, y'\big|_{\varepsilon=0} + m\dot{y}(-x')\big|_{\varepsilon=0} = m(\dot{x}y - \dot{y}x) \qquad (2)$$

3) Das Noether-Theorem gilt nicht für Transf, die nicht von einem kontinuierlichen Parameter abhängen. Beispiel Koordinatenspiegelung: $x \to -x$ (3)

Bisher war Zeitabhängigkeit ausgeklammert.

Satz: Lagrange-Fn. sei unter Zeittransl. invariant: $L(q,\dot{q};t) = L(q,\dot{q};t+\varepsilon)$ (4a) $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$ (4b)

Dann ist $$\tilde{\tilde{I}} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L$$ eine Erhaltungsgröße. (5)

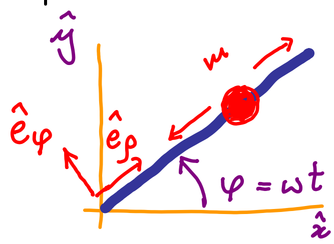
(Bemerkung: für skleronome Zwangsbedingungen wird I später zur Hamiltonfn.)

Beweis:
$$\frac{d}{dt}L = \sum_{k=1}^{f}\Big[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q}}_{\overset{(L9.2)}{=}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{\overset{(4b)}{=}0}\Big] = \frac{d}{dt}\Big[\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\Big] \qquad (6)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\tilde{\tilde{I}} = 0 \Rightarrow \tilde{\tilde{I}} = \text{konst.} \qquad (7)$$ □

Für zeitunabhängige Potenziale aber rheonome(zeitabhängige) Zwangsbed., liefert obiger Satz eine Erhaltungsgröße, die aber nicht als Energie zu interpretieren ist:

Beispiel: Perle auf rotierndem Stab Vorlesung 10, Seite L22):



$$x = \rho\cos\omega t, \quad y = \rho\sin\omega t \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Leftarrow L = T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2) \qquad (2)$$

$$\tilde{\tilde{I}} = \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L \qquad \tilde{\tilde{I}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\dot{\rho} - L \overset{(2)}{=} m\dot{\rho}^2 - \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2) \qquad (3)$$

[nur eine Verallg. Koordinate $q_1 = \rho$]

$$= \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 - \rho^2\omega^2)$$

Check:

Ist I wirklich konstant? Nutze Lösung d. Bewegungsgl.: $\rho(t) \overset{(L24.4)}{=} \rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t}$ (4)

$$\tilde{\tilde{I}} \overset{(3)}{=} \frac{m}{2}\Big[\omega^2(-\rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t})^2 - \omega^2(\rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t})^2\Big] \qquad (5)$$

$$= -m\omega^2\rho_1\rho_2 = \text{konst}$$

Energie kann hier keine Erhaltungsgröße sein, da Zwangskraft Arbeit verrichtet!