Noether-Theorem (wichtig für QM, QFT)   V17 – 10.6.08   L80

Jede einparametrige Schar von Transformationen, unter denen die Wirkung invariant ist, führt zu einer Erhaltungsgrösse!

Zur Erinnerung: Falls $\dfrac{\partial L(q_1)}{\partial q_1} = 0$ (1) (q_1 ist zyklisch), gilt:

(i) generalisierter Impuls erhalten: $0 \overset{(1)}{=} \dfrac{\partial L}{\partial q_1} \overset{(Lg2)}{=} \dfrac{d}{dt}\overbrace{\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_1}}^{p_1} \Rightarrow \dot p_1 = 0, \; p_1 = \text{const.}$ (2)

(ii) L "invariant" unter Verschiebung von q_1: (Funktionale Form ändert sich nicht)

Betrachte Transf.: $q_1 = q_1(q_1', \varepsilon) = q_1' - \varepsilon$, (3a) $\dot q_1 = \dot q_1(\dot q_1') \overset{\frac{d}{dt}(3a)}{=} \dot q_1'$ (3b)

Transformierte Lagrange-Fkt: $L'(q_1', \dot q_1') := L(q_1(q_1', \varepsilon), \dot q_1(\dot q_1')) \overset{(3)}{=} L(q_1' - \varepsilon, \dot q_1') \overset{(1)}{=} L(q_1', \dot q_1')$ (4)

alte Koord., ausgedrückt durch neue Koord.   [da L nicht von q_1 abhängt, (1)]

Fazit: L' hat dieselbe funktionale Form wie L $\Leftrightarrow$ "L ist invariant" □
(dieselbe Abhängigkeit von seinen Koordinaten)

Zentrale Idee heute: Erhaltungsgröße $\overset{(i)}{\Leftarrow}$ q_1 zyklisch $\overset{(ii)}{\Rightarrow}$ Invarianz von L

$\Longleftarrow$ NOETHER $\Longleftarrow$

L81

Frage: Gibt es einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Transf., die Lagrange-Fn. invariant lassen, und Erhaltungsgrößen?

Satz: Noethersches Theorem

Gegeben sei eine ein-eindeutige Koordinatentransformation,

$$q_k = q_k(q_1', \dots, q_k'; t, \varepsilon) \qquad k = 1, \dots, f \qquad (1)$$

$$q_k' = q_k'(q_1, \dots, q_k; t, \varepsilon) \qquad k = 1, \dots, f \qquad (2)$$

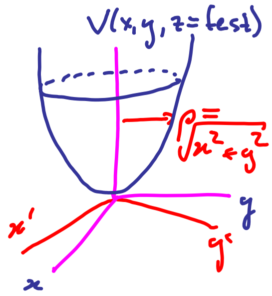
in einem kontinuierlich veränderlichen, differenzierbarem Parameter ε.
Für $\varepsilon = 0$ sei diese Transformation die Identität. Wenn die Lagrange-Fn. unter dieser Transf. invariant ist, gibt es eine Erhaltungsgröße (Integral der Bewegung):

$$I(q, \dot q) = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \left. \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon = 0} \qquad (3)$$

Beispiel: Rotation um z-Achse für:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2\right) - V(\underbrace{x^2+y^2}, z, t) \qquad (1)$$

hängt nur vom Abstand zur z-Achse ab



i) Zugang über kartesische Koord:

Betrachte Rotation um z-Achse:

$$x = x' \cos\varepsilon + y' \sin\varepsilon \qquad (2a)$$
$$y = -x' \sin\varepsilon + y' \cos\varepsilon \qquad (2b)$$
$$z = z' \qquad (2c)$$

Def. transformierte Lagrange-Funktion:

$$L'(q', \dot q'; t, \varepsilon) \overset{(80.3)}{:=} L\left(q(q',\varepsilon), \dot q(\dot q', q', t, \varepsilon)\right) \qquad (3)$$

$$= \frac{m}{2}\Big[\overbrace{(\dot x' \cos\varepsilon + \dot y' \sin\varepsilon)^2}^{\dot x^2} + \overbrace{(-\dot x' \sin\varepsilon + \dot y' \cos\varepsilon)^2}^{\dot y^2} + \overbrace{(\dot z')^2}^{\dot z^2} \Big]$$

$$- V\Big(\overbrace{(x' \cos\varepsilon + y' \sin\varepsilon)^2}^{x^2} + \overbrace{(-x' \sin\varepsilon + y' \cos\varepsilon)^2}^{y^2}, \overbrace{z'}^{z}, t \Big)$$

selber nachrechnen

$$= \frac{m}{2}\left(\dot x'^2 + \dot y'^2 + \dot z'^2\right) - V(x'^2 + y'^2, z', t) \overset{(1)}{=} L(q', \dot q', t) \qquad (4)$$

Fazit: $L'(q', \dot q', t, \varepsilon) = L(q', \dot q', t)$ invariant unter Rot. um z-Achse! (5)

Erhaltungsgröße:

$$I(q, \dot q) \overset{(81.3)}{=} \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \qquad (1)$$

(82.2)
$x = x' \cos\varepsilon + y' \sin\varepsilon$
$y = -x' \sin\varepsilon + y' \cos\varepsilon$
$z = z'$

$$\frac{\partial x(q',\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \left(-x' \sin\varepsilon + y' \cos\varepsilon\right)\Big|_{\varepsilon=0} = y'\Big|_{\varepsilon=0} = y \qquad (2)$$

$$\frac{\partial y(q',\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \left(-x' \cos\varepsilon - y' \sin\varepsilon\right)\Big|_{\varepsilon=0} = -x'\Big|_{\varepsilon=0} = -x \qquad (3)$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x$, $\frac{\partial L}{\partial \dot y} = m\dot y$

$$I \overset{(1)}{=} m\dot x y + m\dot y(-x) = -m(x\dot y - y\dot x) = -L_z \qquad (4)$$

$= $ Drehimpuls um z-Achse

---

ii) Zugang über Zylinder-Koord:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z \qquad (5)$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right) - V(\rho^2, z, t) \Rightarrow \varphi \text{ zyklisch} \qquad (6)$$

Generalisierter Impuls:

$$\text{const} = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m\rho^2\dot\varphi \overset{(5)}{=} L_z \quad [\text{check: } = m(x\dot y - y\dot x)] \qquad (7)$$
$$= -(4)$$

oder: Invarianz unter $\varphi = \varphi' - \varepsilon$:

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} \frac{\partial(\varphi' - \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = m\rho^2\dot\varphi\,(-1) = -(7) \qquad (8)$$
$$= (4)$$

Beweis des Noetherschen Satzes: (verallg. von (80.4))

$q = (q_1, \dots, q_f)$ **L84**

Def. transformierte Lagrange-Funktion:

$$L'(q', \dot q'; t, \varepsilon) := L(q(q', t, \varepsilon), \dot q(q', \dot q'; t, \varepsilon), t) \quad (1)$$

Einerseits: Betrachte:

$$\left.\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \sum_{k=1}^{f} \left[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{(L92)\; \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \underbrace{\frac{\partial \dot q_k(q', \dot q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}} \right]_{\varepsilon=0} \quad (2)$$

$$= \frac{d}{dt} \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0}}_{\equiv I(q, \dot q)} \quad (3)$$

[gilt für alle ε, also auch für $\varepsilon = 0$; $\varepsilon = 0$ erleichtert die Analyse]

Andrerseits: Invarianz der Lagrange-Fn bedeutet:

$$L'(q', \dot q', t; \varepsilon) = L(q', \dot q'; t) \quad (4)$$

[L' hat dieselbe Funktionale Form wie L]

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} \overset{(4)}{=} \frac{\partial L(q', \dot q'; t)}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (5)$$

[denn L hängt nicht von ε ab]

(3) = (5)

$$\frac{d}{dt} I = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I(q, \dot q) = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \left.\frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \text{const} = \text{Erhaltungsgröße}} \quad (6)$$

$\square$

Erweitertes Noether-Theorem:

L85

Wenn sich die Lagrange-Fn. unter der Koord.Transf. (81.2) um eine Eichtr. verändert,

$$L'(q', \dot q'; t, \varepsilon) = L(q', \dot q'; t) + \frac{d}{dt} M(q'; t, \varepsilon), \quad (1)$$

lautet die Erhaltungsgröße:

$$\tilde I(q, \dot q) = \underbrace{\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \frac{\partial q_k(q'; t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}}_{(81.3)}\Bigg|_{\varepsilon=0} - \left.\frac{\partial M(q'; t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \quad (2)$$

Beweis: analog zum vorigen Beweis:

$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}$ (1):

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big[\underbrace{L'(q', \dot q'; t, \varepsilon)}_{(84.3)} - \frac{d}{dt} M(q'; t, \varepsilon) \Big] \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(q', \dot q'; t) = 0 \quad (3)$$

[denn L hängt nicht von ε ab]

$$= \frac{d}{dt} \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \frac{\partial q_k(q'; t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial M(q'; t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0}}_{= \tilde I(q, \dot q) = (2)} \quad (4)$$

[gilt für alle ε, also auch für $\varepsilon = 0$]

(4) = (3) $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \tilde I(q, \dot q) = 0 \quad (5)$$

$\square$

Beispiel: Freier Fall im Schwerfeld: $L(z,\dot z) = \frac{m}{2}\dot z^2 - mgz$ (1)

Betrachte Galileo-Transf.: $z = z' - \varepsilon t$ (2)

Def. transformierte Lagrange-Funktion:

$$L'(z',\dot z';t,\varepsilon) := L(z(z',\varepsilon),\dot z(\dot z',\varepsilon)) = \frac{m}{2}(\dot z'-\varepsilon)^2 - mg(z'-\varepsilon t) \quad (3)$$

$$= \underbrace{\frac{m}{2}\dot z'^2 - mgz'} - \varepsilon m\dot z' + \frac{m}{2}\varepsilon^2 + mg\varepsilon t \quad (4)$$

$$= L(z',\dot z') + \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{-m\varepsilon z' + \tfrac{1}{2}m\varepsilon^2 t + \tfrac{1}{2}mg\varepsilon t^2}_{=:M(z';t,\varepsilon)}\Big) \quad (5)$$

Erhaltungsgröße:

$$\tilde I(z,\dot z) \overset{(85.2)}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot z}\frac{\partial(z'-\varepsilon t)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial M(z';t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \quad (6)$$

$$= m\dot z(-t) - \Big[-mz' + \cancel{m\varepsilon t} + \tfrac{1}{2}mgt^2\Big]_{\varepsilon=0} = m(z - t\dot z - \tfrac{1}{2}gt^2) \quad (7)$$

$z' = z + \cancel{\varepsilon t}$

Ist (7) wirklich konstant? Check mittels Lösung d. Bewegungsgl.: $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + vt + z_0$ (8)

$$\tilde I(z,\dot z) = m\Big[\overbrace{-\tfrac{1}{2}\cancel{g}t^2 + \cancel{vt} + z_0}^{(8)} - t(\cancel{-gt}+\cancel{v}) - \tfrac{1}{2}\cancel{g}t^2\Big] = m z_0 = \text{konst.}\ !$$

In diesem Fall ist die erhaltene Größe eine der Anfangsbedingungen!

Bemerkungen:

1) Lagrange-Mechanik: kont. Symmetrie liefert Erhaltungsgröße;
aber Umkehrung erst in der Hamiltonschen Mechanik gültig

2) I ist im Prinzip Funkt. von ε aber ε-Abhängigkeit bringt keine neue Information. Deswegen immer nur Betrachtung von $\varepsilon \to 0$.
Deshalb reicht tatsächlich schon Invarianz unter infinitesimal Transf. wobei Terme $O(\varepsilon^2)$ vernachlässigt werden.

Im Beispiel von (82.2):

$$x = x' + y'\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (1)$$
$$y = y' - x'\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$
$$z =$$

$$L'(q';\dot q';t,\varepsilon) := L(q(q',\varepsilon),\dot q(q',\dot q';\varepsilon)) + O(\varepsilon^2) \quad (2)$$

$$= \frac{m}{2}\left[(\dot x'+\dot y'\varepsilon)^2 + (\dot y'-\dot x'\varepsilon)^2 + \dot z'^2\right] - V\big((x'+y'\varepsilon)^2 + (y'-x'\varepsilon)^2, z'\big)$$

selber nachrechnen

$$= \frac{m}{2}\left[\dot x'^2 + \dot y'^2 + \dot z'^2\right] - V(x'^2+y'^2, z') + \cancel{O(\varepsilon^2)}$$

$$= L(q',\dot q') + O(\varepsilon^2) \quad (3)$$

deswegen ist Noether-Theorem anwendbar mit Erhaltungsgröße: $\boxed{L88}$

$$x = x' + \varepsilon y'$$
$$y = y' - \varepsilon x'$$

(87.1)
$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot x}\,\frac{\partial x(x',y';\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot y}\,\frac{\partial y(x',y';\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \qquad (1)$$

$$= m\dot x\, y'\big|_{\varepsilon=0} - m\dot y\, x'\big|_{\varepsilon=0} = m(\dot x y - \dot y x) \qquad (2)$$

3) Das Noether-Theorem gilt nicht für Transf, die nicht von einem kontinuierlichen Parameter abhängen. Beispiel Koordinatenspiegelung: $x \to -x$ (3)

Bisher war Zeitabhängigkeit ausgeklammert.

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad (4b)$$

Satz: Lagrange-Fn. sei unter Zeittransl. invariant: $L(q,\dot q;t) = L(q,\dot q;t+\varepsilon)$ (4a)

Dann ist $\overset{\approx}{I} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k - L$ eine Erhaltungsgröße. (5)

(zeitunabh.)

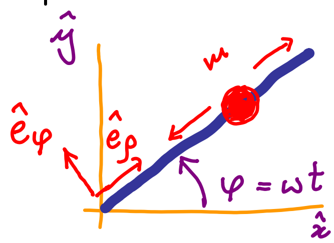
(Bemerkung: für skleronome Zwangsbedingungen wird I später zur Hamiltonfn.)

Beweis:
$$\frac{d}{dt}L = \sum_{k=1}^{f}\Big[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q}}_{\overset{(L92)}{=}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}}\dot q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\ddot q_k + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{\overset{(4b)}{=}0}\Big] = \frac{d}{dt}\Big[\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k\Big] \qquad (6)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\overset{\approx}{I} = 0 \qquad \square \qquad (7)$$

Für zeitunabhängige Potenziale aber rheonome(zeitabhängige) Zwangsbed., liefert obiger Satz eine Erhaltungsgröße, die aber nicht als Energie zu interpretieren ist: $\boxed{L89}$

Beispiel: Perle auf rotierndem Stab Vorlesung 10, Seite L22):



$$x = \rho\cos\omega t,\quad y = \rho\sin\omega t \qquad (1)$$

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\omega^2) \qquad (2)$$

$$\overset{\approx}{I} = \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k - L$$

$$\overset{\approx}{I} = \frac{\partial L}{\partial \dot\rho}\dot\rho + \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\dot\varphi - L \overset{(2)}{=} m\dot\rho^2 - \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\omega^2) \qquad (3)$$

$$= \frac{m}{2}(\dot\rho^2 - \rho^2\omega^2)$$

Check:

Ist I wirklich konstant? Nutze Lösung d. Bewegungsgl.: $\rho(t) \overset{(L24.4)}{=} \rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t}$ (4)

$$\overset{\approx}{I} \overset{(3)}{=} \frac{m}{2}\Big[\omega^2(-\rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t})^2 - \omega^2(\rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t})^2\Big] \qquad (5)$$

$$= -m\omega^2\rho_1\rho_2 = \text{const.}$$

Energie kann hier keine Erhaltungsgröße sein, da Zwangskraft arbeit verrichtet!