Virialsatz: "Nachtrag" zur Newtonschen Mechanik (keine Zwangskräfte) L90

Gelegentlich/häufig ist die Lösung von Systemen mit vielen Freiheitsgraden schwierig bis unmöglich. Nützliche Information kann dann der Virialsatz liefern. UL8 12.6.08

Def. Zeitlicher Mittelwert einer Größe:

$$\overline{O} := \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\; \underbrace{O}_{\text{z.B. } T \text{ oder } U}\left(\vec r_1(t),\dots,\vec r_N(t),\dot{\vec r}_1(t)\dots\dot{\vec r}_N(t)\right) \qquad (1)$$

Satz (Virialsatz): Falls alle $\vec r_i$ und $\dot{\vec r}_i$ im Verlauf der Zeit endlich bleiben, gilt:

$$\boxed{\overline{T} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\overline{\vec r_i\cdot\vec F_i}} \qquad (2)$$

[z.B. für Planeten auf Ellipsen, oder Gasteilchen im Behälter]

Beweis:

$$\overline{T} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\,T = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\,\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\int_0^\tau dt\,\dot{\vec r}_i^{\,2} \qquad (3)$$

part. Integration

$$= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\,\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\cancel{m_i}\Big[\underbrace{\vec r_i\cdot\dot{\vec r}_i\Big|_0^\tau}_{\text{endlich}\;\to\; 0 \text{ wenn } \tau\to\infty} - \int_0^\tau dt\;\vec r_i\cdot\underbrace{\ddot{\vec r}_i}_{\vec F_i/\cancel{m_i}}\Big] \qquad (4)$$

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\overline{\vec r_i\cdot\vec F_i} = (2)\ \checkmark \qquad \square \qquad (5)$$

Lemma: Für Potentialkräfte mit einem Potential, das eine homogene Funktion n-ten Grades ist,

$$V(\lambda\vec r_1,\dots,\lambda\vec r_N) = \lambda^n\,V(\vec r_1,\dots,\vec r_N) \qquad (1)$$

[z.B.: $V = \sum_{i,j}^{N}\frac{V_0}{|\vec r_i-\vec r_j|^\alpha}$, $n = -\alpha$]

besagt der Virialsatz:

$$2\overline{T} = n\overline{V} \qquad (2)$$

Beweis: Für homogene Funktionen gilt:

einerseits: $(1)_R$

$$\frac{d}{d\lambda}V(\lambda\vec r_1,\dots) = n\lambda^{n-1}\,V(\vec r_1,\dots,\vec r_N) \qquad (3a)$$

andererseits: $(1)_L$

$$\frac{d}{d\lambda}V(\lambda\vec r_1,\dots) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial V(\lambda r_1,\dots\lambda r_N)}{\partial(\lambda\vec r_i)}\cdot\underbrace{\frac{\partial(\lambda\vec r_i)}{\partial\lambda}}_{=\vec r_i} \qquad (3b)$$

(3a) = (3b)

Einsetzen: $\lambda = 1$:

$$n\,\cancel{\lambda^{n-1}}^{=1}\,V(\vec r_1,\dots,\vec r_N) = \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial V(\vec r_1,\dots,\vec r_N)}{\partial\vec r_i}\cdot\vec r_i \qquad (4)$$

Wow!

Speziell für Virialsatz:

$$2\overline{T} \overset{(90.5)}{=} \sum_{i=1}^{N}\overline{\vec r_i\cdot(-\vec F_i)} = \sum_{i=1}^{N}\overline{\vec r_i\cdot\frac{\partial V}{\partial\vec r_i}} \overset{(4)}{=} n\overline{V} \qquad (5)\ \square$$

$= (2)\ \checkmark$

L92

Beispiele:

(i) Harmonischer Oszillator: $V = \frac{1}{2} k (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$ $\quad n = 2 \quad \Rightarrow \quad \bar{T} \overset{(9.1.5)}{=} \bar{V}$ (1)

Energieerhaltung gilt immer: $\quad \overline{T + V} = E$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow \quad \bar{T} = \bar{V} = \frac{E}{2}$ (3)

(ii) Kepler-Problem: $V = \frac{V_0}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ $\quad n = -1 \quad \Rightarrow \quad \bar{T} \overset{(9.1.5)}{=} -\frac{1}{2} \bar{V}$ (4)

(4),(2) $\Rightarrow$

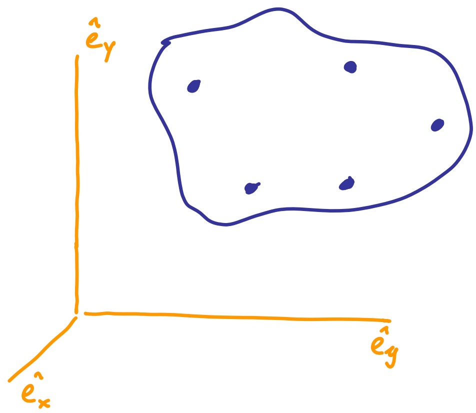
$$\bar{T} = -E \,, \quad \bar{V} = 2E$$ (5)

Bemerkung: Ein Satellit, der durch Reibung Energie verliert (E wird negativer), gewinnt an kinetischer Energie (fliegt schneller)!

Starrer Körper (SK) (Fliessbach, Kap. 19)

V18 – 12.6.08 SK1

Def. SK = System v. Massenpunkten m_ν, deren Abstände konstant sind.



Zur Beschreibung benötigt:

Raumfestes IS:

Körperfestes KS:

SK hat Freiheitsgrade:
Koordinaten für Ursprung v. KS relativ zu Ursprung eines IS
Winkel für Orientierung v. Körperfesten Achsen v. KS rel. zu raumfesten Achsen eines IS

SK2

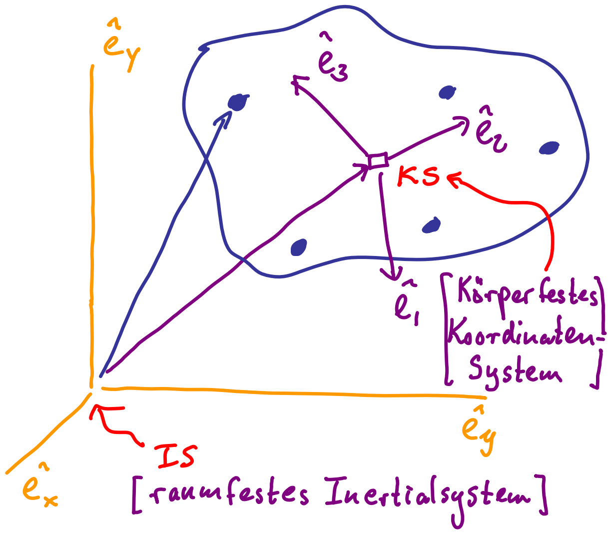
[Def: **Kreisel** ist ein starrer Körper, bei dessen Bewegung ein Punkt festgehalten wird (nur Winkelfreiheitsgrade)]

Es sei:

Ortsvektor, Geschw.

des Ursprungs v. KS rel zum Ursprung v. IS.

die Koordinaten eines Punktes P_ν in $\begin{cases} KS \\ IS \end{cases}$

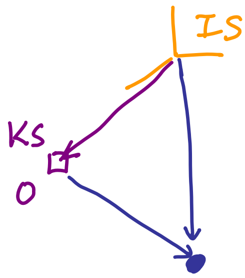


KS rotiere mit Winkelgeschw. relativ zu IS:

$\dot{\hat{e}}_i =$ (1)

SK3

$\vec{r}_{\nu,IS}(t) =$ (1)



$\dot{\vec{r}}_{\nu,IS}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}_{\nu,IS} =$ (2)

Zeitableitung bezieht sich auf's IS; also auf x, y, z.

(Ableitung bez. Koord. x_1, x_2, x_3 in KS) in einem starren Körper, denn alle Punkte ruhen bezüglich KS

$\Longrightarrow$ $\boxed{\vec{v}_{\nu,IS} \overset{(2)}{=} \qquad \nu}$ (3)

Falls Ursprung v. KS bei O' ($\vec{r}_0'$) gewählt wird.

$\vec{r}_0' =$, $\vec{r}_\nu' =$, (4)

Analog zu (3): $\vec{v}_{\nu,IS} =$ (5)

(3) = (5): gilt für alle ν

$\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu = \vec{v}_0' + \vec{\omega}' \times \vec{a} + \vec{\omega}' \times \vec{r}_\nu$ (6)

(3.6) gilt für alle $\vec r_\gamma \in \{SK\} \Rightarrow$ $\boxed{SK4}$

(1)

(2)

(2): $\Longrightarrow$ Geschw. $\vec v_0'$ ist abhängig v. Wahl des KS.

(1): $\Longrightarrow$ Winkelgeschw. ist unabhängig v. Wahl des KS !!

(Charakterisiert Drehbewegung an sich)

Fazit: O darf nach Belieben/Zweckmässigkeit gewählt werden.

Im Folgenden: wie beschreibt man $\vec\omega$ explizit?

Addition v. Winkelgeschw: $\boxed{SK5}$

Warum lassen sich Winkelgeschw. addieren wie Vektoren?

Betrachte 2 aufeinander folgende Drehungen: $d\vec\varphi_a = \vec\omega_a \, dt$ und $d\vec\varphi_b = \vec\omega_b \, dt$

$d\vec\varphi_a$ angewandt auf $\vec r \to \vec r$, (1) $\vec r$

$d\vec\varphi_b$ angewandt auf $\vec r + d\vec r_a \to (\vec r + d\vec r_a)$ (2)

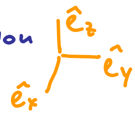
ignoriere $(d\vec\varphi_b \times d\vec r_a)$ (3)

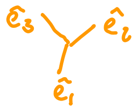
Insgesamt: $\vec r \to \vec r + d\vec r$, mit $d\vec r =$

Infinitesimale Drehgn. sind offenbar vertauschbar = (4)
(endliche nicht!)

Fazit: Gleichzeitiges Drehen mit $\vec\omega_a$ und $\vec\omega_b$ liefert Gesamtwinkelgeschw. =

Euler'sche Winkel (EW)

Wie beschreibt man Drehung von 

auf 

?? $\boxed{SK6}$

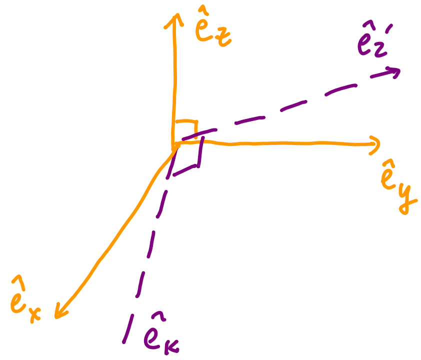
(a) ϕ - Drehung um $\hat e_z$:

$\hat e_x \perp \hat e_y \perp \hat e_z$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$\perp \qquad \perp$

[ϕ : Winkel zwischen
und]

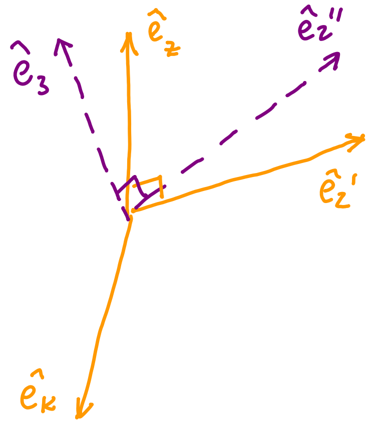


(b) θ - Drehung um $\hat e_K$:

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

[θ : Winkel zwischen
und]

$\perp \qquad \perp$



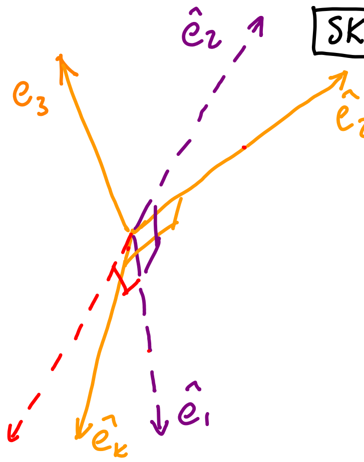
$\boxed{SK7}$

(c) ψ - Drehung um $\hat e_3$:

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

[ψ : Winkel zwischen
und]

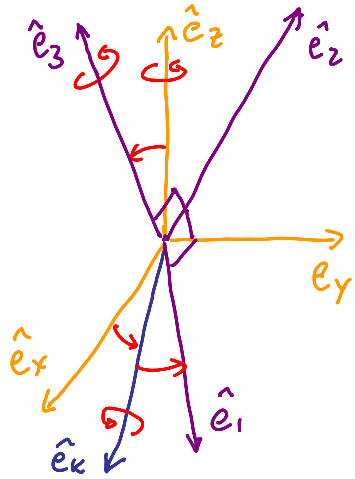
$\perp \qquad \perp$



Also: $\hat e_z \overset{(b)}{=}$ (1a)

$\hat e_2'' \overset{(c)}{=}$ (1b)

$\hat e_K \overset{(c)}{=}$ (1c)



Netto Endergebnis: Winkeländerungen pro dt definieren Winkelgeschwindigkeiten: (WG)

$\vec\omega_\phi \overset{(a)}{=}$ (2a)

$\vec\omega_\theta \overset{(b)}{=}$ (2b)

$\vec\omega_\psi \overset{(c)}{=}$ (2c)

Gesamt WG: $\vec{\omega} =$ (1) $\boxed{SK8}$

wobei (siehe 7.1): $\hat{e}_K \overset{(7.1c)}{=} \cos\psi\,\hat{e}_1 - \sin\psi\,\hat{e}_2$ (2a)

$\hat{e}_z \overset{(7.1a)}{=} \cos\theta\,\hat{e}_3 + \sin\theta\,[\overbrace{\cos\psi\,\hat{e}_2 + \sin\psi\,\hat{e}_1}^{(7.1b)\ \hat{e}_2''}]$ (2b)

Zerlegung nach Komponenten: $\vec{\omega} =$ $:= (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ in IS (3a)

$=$ $:= (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ in KS (3b)

$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_K =$ (5a)

$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_K =$ (5b)

$\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_K =$ (5c)

$\hat{e}_1 \cdot e_z =$ (6a)

$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_z =$ (6b)

$\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_z =$ (6c)

$$\sum_i \omega_i \hat{e}_i \overset{(3b)}{=} \vec{\omega} \overset{(1)}{=} (\dot{\phi}\,\hat{e}_z + \dot{\theta}\,\hat{e}_K + \dot{\psi}\,\hat{e}_3) \quad (4)$$

$$\omega_1 = \hat{e}_1 \cdot \vec{\omega} = \dot{\phi}\,\overbrace{\qquad}^{\hat{e}_1\cdot\hat{e}_z} + \dot{\theta}\,\overbrace{\qquad}^{\hat{e}_1\cdot\hat{e}_K} + \dot{\psi}\,\overbrace{\qquad}^{\hat{e}_1\cdot\hat{e}_3} \quad (5a)$$

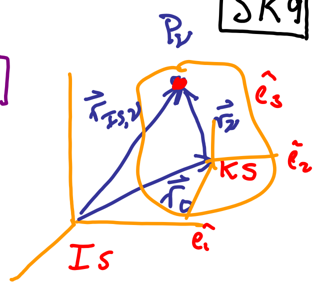
$$\omega_2 = \hat{e}_2 \cdot \vec{\omega} = \dot{\phi} \qquad + \dot{\theta} \qquad + \dot{\psi} \quad (5b)$$

$$\omega_3 = \hat{e}_3 \cdot \vec{\omega} = \dot{\phi} \qquad + \dot{\theta} \qquad + \dot{\psi} \quad (5c)$$

Nun kennen wir WG als Funktion von ϕ, θ, ψ und $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$

Trägheitstensor eines SK (Fliessbach, Kap. 20) $\boxed{SK9}$

[$\dot{\vec{r}}_\nu = 0$ für starren Körper]



$\vec{r}_{IS,\nu} = \vec{r}_0 + \vec{r}_\nu$, (1a) $\quad \vec{v}_{IS,\nu} \overset{(3.2)}{=} \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu$ (1b)

Kinetische Energie: $2T =$ (2)

$$\overset{(1)}{=} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \Big[\qquad \Big] \quad (3)$$

Term (c): $= 2 \sum_\nu m_\nu (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu) \cdot \vec{v}_0 =$ (4)

$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$

$= 0$, falls entweder { (ruht), oder (5a)

(Ursprung v. KS am SP) (5b)

Fortan gelte (9.46):

$$T \overset{(9.3)}{=} \overset{(a)}{\tfrac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}} + \overset{(b)}{\tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{M} m_\nu (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)^2} \qquad (1)$$

SK10

$$=: \qquad (2)$$

Kinetische Energie des SP , der Rotationsbewegung

Im körperfesten KS seien (x_1, x_2, x_3) die Koordinaten bezüglich $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$:

Insbesondere: Für m_ν : $\vec{r}_\nu =$; für WG: $\vec{\omega} \overset{(8.5)}{=}$

Vektoridentität: $$(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = (\vec{\omega}^{\,2})(\vec{r}^{\,2}) - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 \qquad (3)$$

[Beweis: $$\sum_{i=1}^{3} (\vec{\omega} \times \vec{r})_i (\vec{\omega} \times \vec{r})_i = \sum_{ijkmn} (\varepsilon_{ijk}\, \omega_j r_k)(\varepsilon_{imn}\, \omega_m r_n)$$] (4)

$$= \qquad (5)$$

Kinetische Energie der Rotation: $$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)^2 \qquad (1)$$

SK11

$$\overset{(10.3,5)}{=} \frac{1}{2} \qquad \sum_\nu m_\nu \qquad (2)$$

"Trägheits-Tensor"

$$\boxed{T_{rot} \overset{(2)}{=} \qquad \qquad} \qquad (3)$$

enthält Information über
{ Drehbewegung
Massenverteilung

Matrix-Notation: $$T_{rot} = \frac{1}{2} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

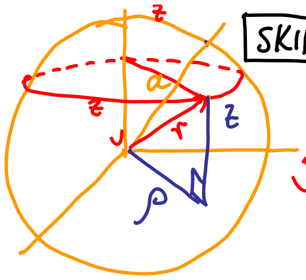
Dyade-Notation: $$=$$

Trägheitstensor für kontinuierliche Massenverteilung: $$\boxed{\Theta_{jm} = \qquad} \qquad (5)$$

Massendichte

Beispiel: Trägheitstensor einer Kugel v. Radius a:

SK11a



$$\Theta_{im} \overset{(11.5)}{=} \int dx \int dy \int dz \; \rho_D(r) \left[r^2 \delta_{im} - r_i r_m \right] \qquad (1)$$

$$= \rho_D = M/\left(\tfrac{4}{3}\pi a^3\right) \qquad (2)$$

Nichtdiagonalelemente:

$$\Theta_{im} = 0 \quad \text{falls } i \neq m \qquad (3)$$

z.B. $\Theta_{12} =$ (4) (siehe S.16)

Zylinder-Koordinaten

$r^2 = \rho^2 + z^2$,

$\rho = \sqrt{r^2 - z^2}$

Diagonalelemente:

Benutze Zylinder-Koordinaten, mit z-Achse in i-Richtung wegen Rotationssymmetrie:

$$\Theta_{ii} = \qquad (5)$$

$1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$

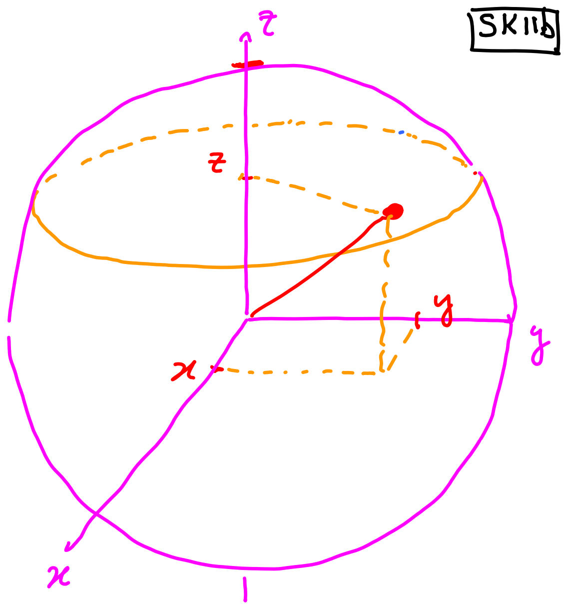
$= \frac{15-10+3}{15} = \frac{8}{15}$

$$= 2\pi\rho_D \int_{-a}^{a} dz \qquad = 2\pi\rho_D \int_0^a dz \qquad (6)$$

$$= \pi\rho_D \left\{ a^4 \cdot a - 2a^2 \tfrac{1}{3} a^3 + \tfrac{1}{5} a^5 \right\} = \tfrac{8}{15}\pi\rho_D a^5 \overset{(2)}{=} \tfrac{2}{5} M a^2 \qquad (7)$$

Ausführlicher:

SK11b



$$\Theta_{12} = \int dz \int dy \int dx \; x\, y \qquad (1)$$

Cartesische Koordinaten:

$$\Theta_{12} = \int dz \int dy \; y \int dx \; x \qquad (2)$$

$$y_0 = \qquad (3)$$

$$x_0 = \qquad (4)$$

Kugelkoordinaten:

$$\Theta_{12} = \underbrace{\int_0^a dr\, r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \, \sin\theta}_{d^3r} \; x\, y \qquad (5)$$

$$(r \sin\theta \cos\varphi)(r \sin\theta \sin\varphi) = 0. \; ✓$$