Virialsatz: "Nachtrag" zur Newtonschen Mechanik (keine Zwangskräfte)
Gelegentlich/häufig ist die Lösung von Systemen mit vielen Freiheitsgraden schwierig bis unmöglich. Nützliche Information kann dann der Virialsatz liefern.

VL8 12.6.08

Def. Zeitlicher Mittelwert einer Größe:

$$\overline{O} := \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \; \underbrace{O}_{\text{z.B. } T \text{ oder } U}\left(\vec{r}_1(t),\dots,\vec{r}_N(t),\dot{\vec{r}}_1(t)\dots\dot{\vec{r}}_N(t)\right) \quad (1)$$

Satz (Virialsatz): Falls alle $\vec{r}_i$ und $\dot{\vec{r}}_i$ im Verlauf der Zeit endlich bleiben, gilt:

$$\boxed{\overline{T} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \overline{\vec{r}_i\cdot\vec{F}_i}} \quad (2)$$

[z.B. für Planeten auf Ellipsen, oder Gasteilchen im Behälter]

Beweis:

$$\overline{T} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\, T = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N m_i\int_0^\tau dt\,\dot{\vec{r}}_i^{\,2} \quad (3)$$

part. Integration

$$= \underbrace{\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \cancel{m_i}\Big[\underbrace{\vec{r}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i\Big|_0^\tau}_{\text{endlich}}}_{\to 0 \text{ wenn } \tau\to\infty} - \int_0^\tau dt\,\vec{r}_i\cdot\underbrace{\ddot{\vec{r}}_i}_{\vec{F}_i/\cancel{m_i}}\Big] \quad (4)$$

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \overline{\vec{r}_i\cdot\vec{F}_i} = (2) \checkmark \qquad \square \quad (5)$$

Lemma: Für Potentialkräfte mit einem Potential, das eine homogene Funktion n-ten Grades ist,

$$V(\lambda\vec{r}_1,\dots,\lambda\vec{r}_N) = \lambda^n V(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N) \quad (1)$$

[z.B.: $V = \sum_{i,j}^N \frac{V_0}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|^\alpha}$, $n = -\alpha$]

besagt der Virialsatz:

$$2\overline{T} = n\overline{V} \quad (2)$$

Beweis: Für homogene Funktionen gilt:

$$\frac{d}{d\lambda}V(\lambda\vec{r}_1,\dots) = \begin{cases} \text{einerseits: } (1)_R \to n\lambda^{n-1}V(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N) & (3a)\\ \text{andererseits: } (1)_L \to \sum_{i=1}^N \frac{\partial V(\lambda\vec{r}_1,\dots\lambda\vec{r}_N)}{\partial(\lambda\vec{r}_i)}\cdot\underbrace{\frac{\partial(\lambda\vec{r}_i)}{\partial\lambda}}_{=\vec{r}_i} & (3b)\end{cases}$$

Einsetzen: $\lambda = 1$:

$$(3a)=(3b):\quad n\cancel{\lambda^{n-1}}^{=1}\,V(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N) = \sum_{n=1}^N \frac{\partial V(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N)}{\partial\vec{r}_i}\cdot\vec{r}_i \quad (4)$$

Wow!

Speziell für Virialsatz:

$$2\overline{T} \overset{(90.5)}{=} \sum_{i=1}^N \overline{\vec{r}_i\cdot(-\vec{F}_i)} = \sum_{i=1}^N \overline{\vec{r}_i\cdot\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}} \overset{(4)}{=} n\overline{V} \quad (5) \; \square$$

$= (2) \checkmark$

Beispiele:

(i) Harmonischer Oszillator: $V = \frac{1}{2}k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$ $\quad n = 2 \quad \Rightarrow \quad \bar{T} \overset{(91.5)}{=} \bar{V}$ (1)

Energieerhaltung gilt immer: $\quad \overline{T + V} = E$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \quad \bar{T} = \bar{V} = \frac{E}{2}$ (3)

(ii) Kepler-Problem: $V = \frac{V_0}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ $\quad n = -1 \quad \Rightarrow \quad \bar{T} \overset{(91.5)}{=} -\frac{1}{2}\bar{V}$ (4)

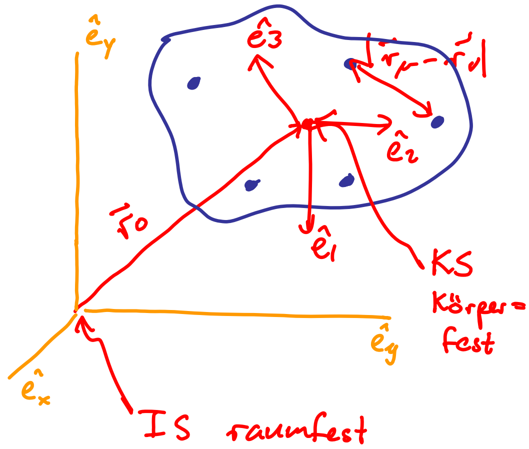
(4), (2) $\Rightarrow$

$\bar{T} = -E, \quad \bar{V} = 2E$ (5)

Bemerkung: Ein Satellit, der durch Reibung Energie verliert (E wird negativer), gewinnt an kinetischer Energie (fliegt schneller)!

Starrer Körper (SK) (Fliessbach, Kap. 19)

V18 – 12.6.08



Def. SK = System v. Massenpunkten m_ν, deren Abstände $|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|$ konstant sind.

Zur Beschreibung benötigt:

Raumfestes IS: $x, y, z, \quad \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$

Körperfestes KS: $x_1, x_2, x_3, \quad \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$

SK hat 6 Freiheitsgrade: 3 Koordinaten für Ursprung v. KS relativ zu Ursprung eines IS

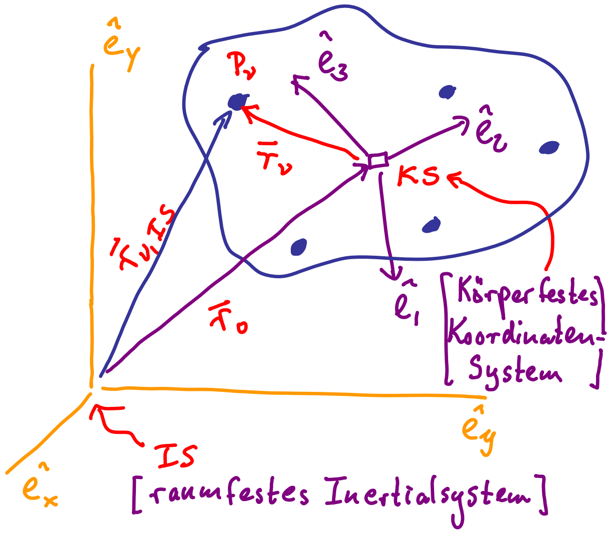
3 Winkel für Orientierung v. 3 Körperfesten Achsen v. KS $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ rel. zu 3 raumfesten Achsen eines IS $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$

[**Def:** **Kreisel** ist ein starrer Körper, bei dessen Bewegung ein Punkt festgehalten wird (nur Winkelfreiheitsgrade)] SK2

Es sei:

$\vec{r}_0(t)$ Ortsvektor, $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0(t)$ Geschw. des Ursprungs v. KS rel zum Ursprung v. IS.

$\vec{r}_\nu$ / $\vec{r}_{\nu,IS}$ die Koordinaten eines Punktes P_ν in {KS / IS}



KS rotiere mit Winkelgeschw. relativ zu IS: $\vec{\omega}$

$$\dot{\hat{e}}_i = \vec{\omega} \times \hat{e}_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \qquad (1)$$

SK3

$$\vec{r}_{\nu,IS}(t) = \vec{r}_0 + \vec{r}_\nu$$

$$\vec{r}_\nu = \sum_i x_i \hat{e}_i$$

$$\dot{\vec{r}}_{\nu,IS}(t) \overset{(1)}{=} \frac{d}{dt}\vec{r}_{\nu,IS} = \vec{v}_0 + (\underbrace{\dot{\vec{r}}_\nu + \vec{\omega}\times\vec{r}_\nu}_{= \sum_i (\dot{x}_i \hat{e}_i + x_i \dot{\hat{e}}_i)}) \qquad (2)$$

Zeitableitung bezieht sich auf's IS; also auf x, y, z.

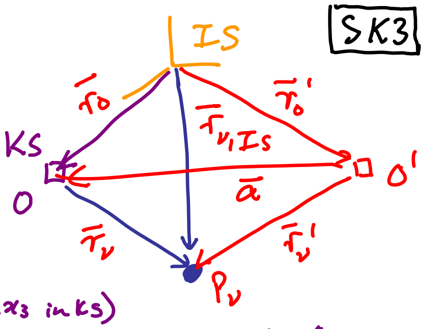
(Ableitung bez. Koord. x_1, x_2, x_3 in KS)

$= 0$ in einem starren Körper, denn alle Punkte ruhen bezüglich KS

$$\dot{\vec{r}}_\nu \equiv \left(\frac{dx_1}{dt}\right)\hat{e}_1 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)\hat{e}_2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)\hat{e}_3$$

$= 0$ im SK $\qquad (3)$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{v}_{\nu,IS} \overset{(2)}{=} \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}_\nu}$$



Falls Ursprung v. KS bei O' ($\vec{r}_0'$) gewählt wird.

$$\vec{r}_0' = \vec{r}_0 - \vec{a} \quad , \quad \vec{r}_\nu' = \vec{a} + \vec{r}_\nu \, , \qquad (4)$$

Analog zu (3):

$$\vec{v}_{\nu,IS} = \vec{v}_0' + \vec{\omega}' \times \vec{r}_\nu' \qquad (5)$$

(3) = (5): gilt für alle ν

$$\vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}_\nu = \vec{v}_0' + \vec{\omega}'\times\vec{a} + \vec{\omega}'\times\vec{r}_\nu \qquad (6)$$

(3.6) gilt für alle $\vec r_\gamma \in \{SK\} \Rightarrow$ $\boxed{SK4}$

$$\vec\omega\,' = \vec\omega \qquad (1)$$

$$\vec v_0\,' = \vec v_0 - \vec\omega \times \vec a \qquad (2)$$

(2): $\Longrightarrow$ Geschw. $\vec v_0\,'$ ist abhängig v. Wahl des KS.

(1): $\Longrightarrow$ Winkelgeschw. ist unabhängig v. Wahl des KS !!
(Charakterisiert Drehbewegung an sich)

Ursprung von KS

Fazit: O darf nach Belieben/Zweckmässigkeit gewählt werden.

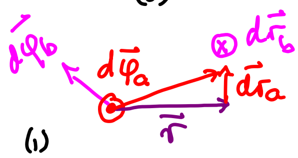
Im Folgenden: wie beschreibt man $\vec\omega$ explizit?

Addition v. Winkelgeschw.: $\boxed{SK5}$

$$\vec\omega = \frac{d\vec\varphi}{dt}$$

Warum lassen sich Winkelgeschw. addieren wie Vektoren?

Betrachte 2 aufeinander folgende Drehungen: $d\vec\varphi_a = \vec\omega_a\, dt$ und $d\vec\varphi_b = \vec\omega_b\, dt$ (0)



$d\vec\varphi_a$ angewandt auf $\vec r \to \vec r + d\vec r_a$, $\quad d\vec r_a = d\vec\varphi_a \times \vec r$ (1)

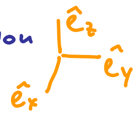
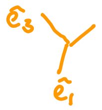
$d\vec\varphi_b$ angewandt auf $\vec r + d\vec r_a \to (\vec r + \underbrace{d\vec r_a) + d\vec r_b}_{d\vec r}$, $\quad d\vec r_b = d\vec\varphi_b \times (\vec r + d\vec r_a)$ (2)

ignoriere $(d\vec\varphi_b \times d\vec r_a)$ $\qquad \simeq d\vec\varphi_b \times \vec r$ (3)

Insgesamt: $\vec r \to \vec r + d\vec r$, mit $d\vec r = d\vec r_a + d\vec r_b$

Infinitesimale Drehgn. sind offenbar vertauschbar (endliche nicht!) $\qquad = (d\vec\varphi_a + d\vec\varphi_b) \times \vec r$ (4)

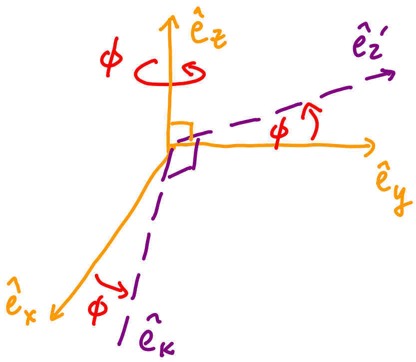
Fazit: Gleichzeitiges Drehen mit $\vec\omega_a$ und $\vec\omega_b$ liefert Gesamtwinkelgeschw. $\qquad \overset{(0)}{=} \underbrace{(\vec\omega_a + \vec\omega_b)}_{\vec\omega}\, dt \times \vec r$ (5)

Euler'sche Winkel (EW) Wie beschreibt man Drehung von  auf  ?? $\boxed{\text{SK6}}$

(a) ϕ-Drehung um $\hat{e}_z$:

$$\begin{array}{ccccc} \hat{e}_x & \perp & \hat{e}_y & \perp & \hat{e}_z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{e}_K & \perp & \hat{e}_2' & \perp & \hat{e}_z \end{array}$$

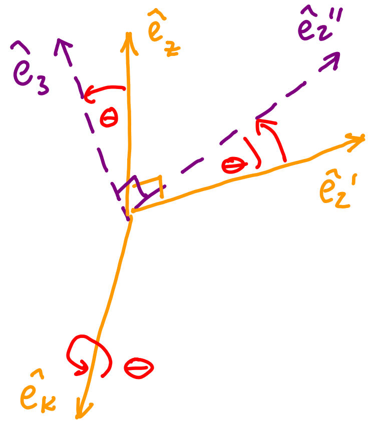
[ϕ: Winkel zwischen $\hat{e}_x$ und $\hat{e}_K$]



(b) θ-Drehung um $\hat{e}_K$:

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{e}_K & \perp & \hat{e}_2'' & \perp & \hat{e}_3 \end{array}$$

[θ: Winkel zwischen $\hat{e}_z$ und $\hat{e}_3$]

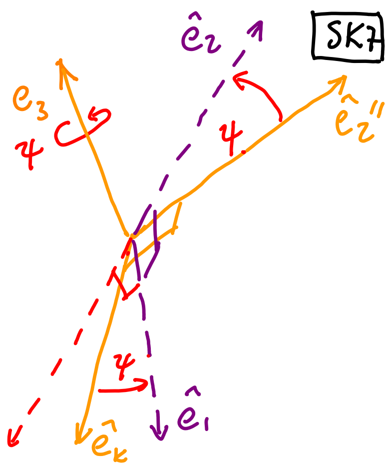


$\boxed{\text{SK7}}$

(c) ψ-Drehung um $\hat{e}_3$:

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{e}_1 & \perp & \hat{e}_2 & \perp & \hat{e}_3 \end{array}$$

[ψ: Winkel zwischen $\hat{e}_K$ und $\hat{e}_1$]



Also:

$$\hat{e}_z \overset{(b)}{=} \cos\theta\, \hat{e}_3 + \sin\theta\, \hat{e}_2'' \qquad (1a)$$

$$\hat{e}_2'' \overset{(c)}{=} \cos\psi\, \hat{e}_2 + \sin\psi\, \hat{e}_1 \qquad (1b)$$

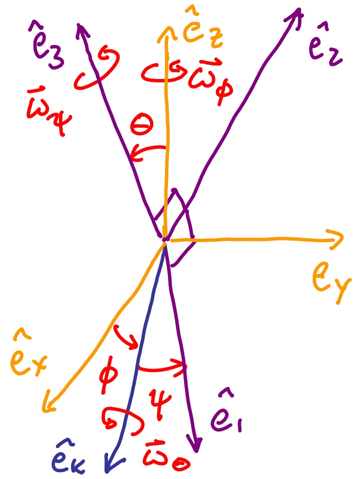
$$\hat{e}_K \overset{(c)}{=} \cos\psi\, \hat{e}_1 - \sin\psi\, \hat{e}_2 \qquad (1c)$$

Netto Endergebnis: Winkeländerungen pro dt definieren Winkelgeschwindigkeiten: (WG)

$$\vec{\omega}_\phi \overset{(a)}{=} \dot{\phi}\, \hat{e}_z \qquad (2a)$$

$$\vec{\omega}_\theta \overset{(b)}{=} \dot{\theta}\, \hat{e}_K \qquad (2b)$$

$$\vec{\omega}_\psi \overset{(c)}{=} \dot{\psi}\, \hat{e}_3 \qquad (2c)$$



Gesamt Wg: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_\phi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi \overset{(7.2)}{=} \dot{\phi}\,\hat{e}_z + \dot{\theta}\,\hat{e}_K + \dot{\psi}\,\hat{e}_3$ (1) $\boxed{\text{SK8}}$

wobei (siehe 7.1):

$$\hat{e}_K \overset{(7.1c)}{=} \cos\psi\,\hat{e}_1 - \sin\psi\,\hat{e}_2 \qquad (2a)$$

$$\hat{e}_z \overset{(7.1a)}{=} \cos\theta\,\hat{e}_3 + \sin\theta\,[\overbrace{\cos\psi\,\hat{e}_2 + \sin\psi\,\hat{e}_1}^{(7.1b)\ \hat{e}_2''}] \qquad (2b)$$

Zerlegung nach Komponenten: $\vec{\omega} = \omega_x \hat{e}_x + \omega_y \hat{e}_y + \omega_z \hat{e}_z := (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ in IS (3a)

$= \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3 := (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ in KS (3b)

$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_K \overset{(2a)}{=} \cos\psi$ (5a)

$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_K = -\sin\psi$ (5b)

$\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_K = 0$ (5c)

$\hat{e}_1 \cdot e_z = \sin\theta\,\sin\psi$ (6a)

$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_z = \sin\theta\,\cos\psi$ (6b)

$\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_z = \cos\theta$ (6c)

$$\omega_j = \sum_i \omega_i \underbrace{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j}_{\delta_{ij}} \overset{(3b)}{=} \hat{e}_j \cdot \vec{\omega} \overset{(1)}{=} \hat{e}_j \cdot (\dot{\phi}\,\hat{e}_z + \dot{\theta}\,\hat{e}_K + \dot{\psi}\,\hat{e}_3) \qquad (4)$$

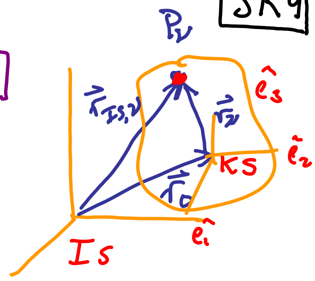
(6) (5)

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \hat{e}_1 \cdot \vec{\omega} = \dot{\phi}\,\overbrace{\sin\theta\,\sin\psi}^{\hat{e}_1\cdot\hat{e}_z} + \dot{\theta}\,\overbrace{\cos\psi}^{\hat{e}_1\cdot\hat{e}_K} + \dot{\psi}\,\overbrace{0}^{\hat{e}_1\cdot\hat{e}_3} && (5a)\\ \omega_2 &= \hat{e}_2 \cdot \vec{\omega} = \dot{\phi}\,\sin\theta\,\cos\psi + \dot{\theta}\,(-\sin\psi) + \dot{\psi}\cdot 0 && (5b)\\ \omega_3 &= \hat{e}_3 \cdot \vec{\omega} = \dot{\phi}\,\cos\theta + \dot{\theta}\cdot 0 + \dot{\psi}\cdot 1 && (5c) \end{aligned}}$$

Nun kennen wir Wg als Funktion von ϕ, θ, ψ und $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$

Trägheitstensor eines SK (Fliessbach, Kap. 20) $\boxed{\text{SK9}}$

[$\dot{\vec{r}}_\nu = 0$ für starren Körper]



$\vec{r}_{IS,\nu} = \vec{r}_0 + \vec{r}_\nu$, (1a) $\quad \vec{v}_{IS,\nu} \overset{(3.2)}{=} \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu$ (1b)

Kinetische Energie: $2T = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\, \vec{v}_{\nu,IS}^{\,2}$ (2)

$$\overset{(1)}{=} \underbrace{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu}_{M} \Big[\underbrace{\vec{v}_0^{\,2}}_{(a)} + \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)^2}_{(b)} + \underbrace{2\,(\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)\cdot\vec{v}_0}_{(c)}\Big] \qquad (3)$$

Term (c):

$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$

$$= 2 \sum_\nu m_\nu (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu) \cdot \vec{v}_0 = (\vec{v}_0 \times \vec{\omega}) \cdot 2 \overbrace{\sum_\nu m_\nu\, \vec{r}_\nu}^{M\vec{R}_S} \qquad (4)$$

$= 0$, falls entweder

$\vec{v}_0 = 0$ ($\vec{r}_0$ ruht), oder (5a)

$\vec{R}_S = 0$ (Ursprung v. KS am SP) (5b)

Fortan gelte (9.5b):

$$T \overset{(9.3)}{=} \overset{(a)}{\frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}} + \overset{(b)}{\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{M} m_\nu (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)^2} \quad (1)$$

SK10

$$=: T_{trans} + T_{rot} \quad (2)$$

Kinetische Energie des SP , der Rotationsbewegung

Im körperfesten KS seien (x_1, x_2, x_3) die Koordinaten bezüglich $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$:

Insbesondere: Für m_ν : $\vec{r}_\nu = (r_1^\nu, r_2^\nu, r_3^\nu)$; für WG: $\vec{\omega} \overset{(8.5)}{=} (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

Vektoridentität: $$(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = (\vec{\omega}^2)(\vec{r}^{\,2}) - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 \quad (3)$$

[Beweis: $\sum_{i=1}^{3} (\vec{\omega} \times \vec{r})_i (\vec{\omega} \times \vec{r})_i = \sum_{ijkmn} (\varepsilon_{ijk} \omega_j r_k)(\varepsilon_{imn} \omega_m r_n)$ $[\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}]$] (4)

$$= \sum_{jm} \omega_j \omega_m \left(\underbrace{\vec{r}^{\,2}}_{\sum_n r_n r_n} \delta_{jm} - r_j r_m \right) \quad (5)$$

Kinetische Energie der Rotation:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)^2 \quad (1)$$

SK11

$$\overset{(10.3,5)}{=} \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j \underbrace{\left(\sum_\nu m_\nu \left[(\vec{r}_\nu)^2 \delta_{jm} - r_j^\nu r_m^\nu \right] \right)}_{I_{jm} := \Theta_{jm} = \theta_{jm}} \omega_m \quad (2)$$

"Trägheits-Tensor"

$$\boxed{T_{rot} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j \Theta_{jm} \omega_m} \quad (3)$$

enthält Information über
{ Drehbewegung (ω)
Massenverteilung (Θ)

Matrix-Notation: $$T_{rot} = \frac{1}{2} \underbrace{(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}_{\vec{\omega}^T} \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}}_{\vec{\omega}} \quad (4)$$

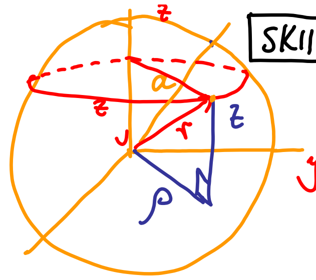
Dyade-Notation: $$= \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \cdot \hat{\Theta} \cdot \vec{\omega}$$

Trägheitstensor für kontinuierliche Massenverteilung:

$$\boxed{\Theta_{jm} = \int d^3\vec{r} \, \underbrace{\rho_D(\vec{r})}_{\text{Massendichte}} \left[\vec{r}^{\,2} \delta_{jm} - r_j r_m \right]} \quad (5)$$

Beispiel: Trägheitstensor einer Kugel v. Radius a:

$\boxed{\text{SK11a}}$



$$\Theta_{im} \overset{(11.5)}{=} \underset{(r<a)}{\int dx \int dy \int dz} \; \rho_D(r) \left[r^2 \delta_{im} - r_i r_m \right] \qquad (1)$$

$$= \rho_D = \frac{M}{Vol} = M / \left(\tfrac{4}{3}\pi a^3 \right) \qquad (2)$$

Nichtdiagonal elemente:

$$\Theta_{im} = 0 \quad \text{falls} \quad i \neq m \qquad (3)$$

z.B. $\Theta_{12} = \rho_D \int dz \underbrace{\int dy \, y \int dx \, x}_{\text{symmetrisches Interval}} = 0 \qquad (4)$ (siehe S.16)

Zylinder-Koordinaten

$r^2 = \rho^2 + z^2$,

$\rho = \sqrt{r^2 - z^2}$

Diagonalelemente:

Benutze Zylinder-Koordinaten, mit z-Achse in i-Richtung

wegen Rotationssymmetrie:

$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33} =$

wegen Kugelsymmetrie

$$\Theta_{ii} \overset{(1)}{=} \int_{-a}^{a} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} d\rho \, \rho \;\; \rho_D \Big[\overbrace{\rho^2 + \cancel{z^2}}^{= r^2} - \cancel{z} \cdot z \Big] \qquad (5)$$

$$= 2\pi \rho_D \int_{-a}^{a} dz \; \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} = \frac{2\pi \rho_D}{4} \int_0^a dz \, \left(a^2 - z^2\right)^2 \qquad (6)$$

$1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$

$= \frac{15 - 10 + 3}{15} = \frac{8}{15}$

$$= \pi \rho_D \left[a^4 \cdot a - 2a^2 \tfrac{1}{3} a^3 + \tfrac{1}{5} a^5 \right] = \frac{8}{15} \pi \rho_D a^5 \overset{(2)}{=} \frac{2}{5} M a^2 \qquad (7)$$

Ausführlicher:

$\boxed{\text{SK11b}}$

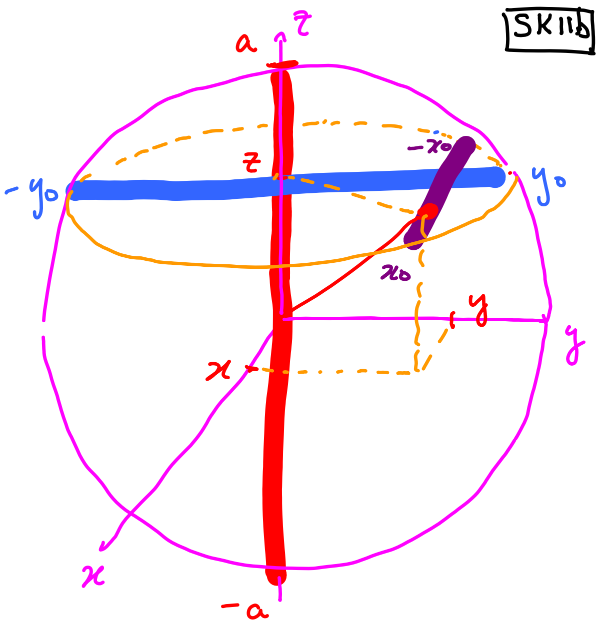
$$\Theta_{12} = \int dz \int dy \int dx \;\; x \, y \qquad (1)$$

Cartesische Koordinaten:

$$\Theta_{12} = \int_{-a}^{a} dz \int_{-y_0}^{\overbrace{y_0}^{=0}} dy \; y \int_{-x_0}^{\overbrace{x_0}^{=0}} dx \;\; x \qquad (2)$$

$$y_0 = \sqrt{a^2 - z^2} \qquad (3)$$

$$x_0 = \sqrt{a^2 - z^2 - y^2} \qquad (4)$$



Kugelkoordinaten:

$$\Theta_{12} = \underbrace{\int_0^a dr \, r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \, \sin\theta}_{d^3r} \quad x \, y \quad = 0 \qquad (5)$$

$(r \sin\theta \cos\varphi)(r \sin\theta \sin\varphi)$. ✓