Kinetische Energie einer kontinuierlichen Massenverteilung

V19 17.6.07 SK12

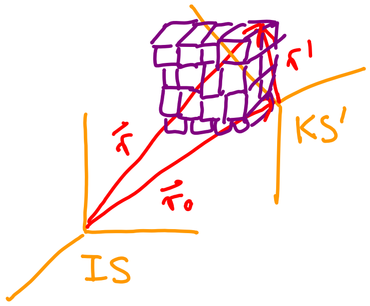
Satz: Es gilt wieder: (vergleiche 10.2)

$$T = T_{trans} + T_{rot} \qquad (1)$$

Beweis:

$$T = \qquad (2)$$

$\vec{v}(\vec{r}) :=$ Geschw. eines Volumenelements bei $\vec{r}$, bezüglich Ursprung v. IS.



Analog zu (3.1), (3.3): (3)

(3) in (2):

$$T = \frac{1}{2}\int d^3r'\, \rho_D(\vec{r}\,'+\vec{r}_0)\, \left[\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right]^2 \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r'\, \rho'_D(\vec{r}\,')\, \left[\dot{\vec{r}}_0^{\,2} + 2\,\dot{\vec{r}}_0\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') + (\vec{\omega}\times\vec{r}\,')^2\right] \qquad (5)$$

Wähle Ursprung v. KS im Schwerpunkt, $\Rightarrow$ $\int d^3r'\rho(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' = 0$

$$= \frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_0^{\,2} + 0 + \frac{1}{2}\int d^3r'\, \rho'_D(\vec{r}\,')\, \left[\vec{\omega}^{\,2}\cdot\vec{r}\,'^{\,2} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,')^2\right] \qquad (6)$$

(7)

Bemerkung: Die ω_i in (12.5) sind die Projektionen der Winkelgeschwindigkeiten auf die Koordinatenachsen des körperfesten Bezugsystems.

SK13

Drehmatrix

Def: Unter Drehungen, $\vec{r} \rightarrow$ $\qquad \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$ (1)

transformiert sich

(i) ein "Tensor 0. Stufe" (= Skalar) wie $S \rightarrow$ (invariant) (2)

(ii) ein "Tensor 1. Stufe" (= Vektor) wie $\vec{A} \rightarrow$ (also "wie Ortsvektor") (3)

(iii) ein "Tensor 2. Stufe" wie $I \rightarrow$ (4)

Indizes explizit:

$$A_i \rightarrow A'_i \overset{(3)}{=} \quad , \quad I_{ij} \rightarrow I'_{ij} \overset{(4)}{=} \qquad (4)$$

$\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}^T$

$\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}(\cdots)$, $\quad \begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}(\cdots)$

Eselsbrücke: Tensor 2.te Stufe verhält sich wie ein "Äuseres Produkt" zweier Vektoren, also "Spaltenvektor × Reihenvektor"

Satz: Trägheitstensor verhält sich unter Drehungen wie ein Tensor 2.ter Stufe [SK14]

Beweis: laut Def:

$$\Theta'_{ij} = \int d^3r' \, \rho'_D(\vec{r}\,') \left[\vec{r}\,'^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j \right] \qquad (1)$$

$$= \qquad (2)$$

Volumenelement unverändert

Länge = Skalar, unverändert

$$= \int d^3r \, \rho_D(\vec{r}) \qquad (3)$$

R, R^T sind Ortsunabhängig, können aus Integral ausgeklammert werden

$$= \qquad (4)$$

Offenbar hängt vorm von Θ von Wahl des Koordinatensystems ab – es ändert sich unter Drehungen! □

Vereinfachungen bei Berechnung von Θ sind möglich: [SK15]

1. Vereinfachung: Wähle Ursprung von KS im Schwerpunkt

2. Vereinfachung: **Satz:** Es gibt ein Koordinatensystem KS, in dem der Trägheitstensor diagonalform hat:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Bemerkung: Man bezeichnet die Transformation zu diesem KS als "Hauptachsentransf.", das entsprechende KS als "Hauptträgheitsachsensystem", und die Diagonalelemente als "Hauptträgheitsmomente".

Beweis: Θ ist reelle, symmetrische 3x3 Matrix: (2)

Aus linearen Algebra bekannt: $\Longrightarrow$ Es existiert eine orthogonale Transf., die Θ diagonalisiert.

(3)

Die orthogonale Transf. R wird dann gerade als Drehung interpretiert. □

Bemerkung:

Die allgemeine Form

$$\Theta_{ij} = \int d^3r \, \rho_D(\vec r) \left(\vec r^{\,2} \delta_{ij} - r_i r_j \right) \quad (1)$$

vereinfacht sich in Hauptachsenbasis zu:

$$\Theta_x = \int dx\, dy\, dz \; \rho_D(\vec r)$$

$$= \int dx\, dy\, dz \; \rho_D(\vec r) \quad (2a)$$

$$\Theta_y = \int dx\, dy\, dz \; \rho_D(\vec r) \quad (2b)$$

$$\Theta_z = \int dx\, dy\, dz \; \rho_D(\vec r) \quad (2c)$$

Erinnerung (lineare Algebra): Das Auffinden der Hauptträgheitsmomente ist gerade die Bestimmung der Eigenwerte der Matrix Θ :

Suche Vektoren $\vec a_i$, mit

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (1)$$

Matrix Skalar

Dies ist äquivalent zum Finden der Nullstellen von (2)

Einheitsmatrix

Jede Lösung λ ist eines der Hauptträgheitsmomente Θ_i.

Beachte, daß man die $\vec a_i$ normiert und orthogonal wählen kann (diese Wahl ist nur eindeutig, falls).

Bezeichnungen: "unsymmetrischer Kreisel", falls:

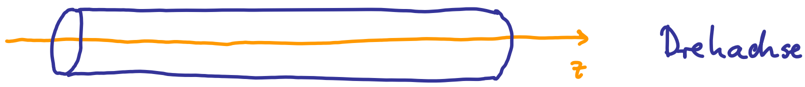
"symmetrischer Kreisel" falls :

"Kugelkreisel", falls: : (3)

SK18

Satz: Ist ein starrer Körper rotationssymmetrisch, liegt der Schwerpunkt auf dieser Achse und der Körper ist ein symmetrischer Kreisel.

Beispiel: Zylinder



Beweis: Wähle z-Achse entlang Symmetrieachse.

Rotationssymmetrie bedeutet: $\rho =$ (1)

Folglich gilt $\int dx\,dy\,dz\; \rho_D(x^2+y^2, z)$ (2)

{ }: Kurznotation für 3 getrennte Gleichungen.

Also liegt Schwerpunkt auf z-Achse: $S =$ (3)

SK19

Trägheitstensor: $\Theta_{xx} = \int dx\,dy\,dz\; \rho_D(x^2+y^2, z)$ (1)

Umbenennung der Integrationsvariablen:

$=$ (2)

$=$

$\Theta_{xy} \overset{(16.2a)}{=} \int dx\,dy\,dz\; \rho_D(x^2+y^2, z)$ (3)

Analog:

$\Theta_{yz} =$ (4a)

$\Theta_{zx} =$ (4b)

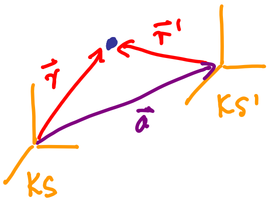
Folglich: $\Theta = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ (5)

Bemerkung: Die Hauptträgheitsachsen fallen mit den Symmetrieachsen des starren Körpers zusammen.

Satz von Steiner

SK20

Sei Θ der Trägheitstensor, berechnet bezüglich des Schwerpunkts in KS.
Sei KS' ein zu KS achsenparalleles Koordinatensystem, das um einen Vektor $\vec{a}$ verschoben ist. Dann gilt für Trägheitstensoren bezüglich KS':



$$\Theta'_{ij} = \qquad (1)$$

Beweis:

$$\Theta'_{ij} = \int d^3r' \, \rho'_D(\vec{r}') \left[\vec{r}'^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j \right] \qquad (2)$$

$$=$$

$$= \int d^3r \, \rho_D(\vec{r}) \left[(\qquad) + (\qquad) + (\qquad) \right] \qquad (3)$$

Terme linear in r liefern 0, da Ursprung von KS im Schwerpunkt liegt.

□

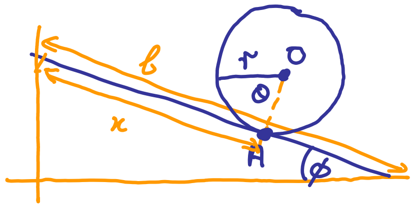
Wiederholung: rollender Reifen auf schiefer Ebene.

SK21

Auf Seite L76 wurde angegeben:

Kinetische Energie $T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2$

Potenzielle Energie: $V = Mg(\ell - x)\sin\phi$

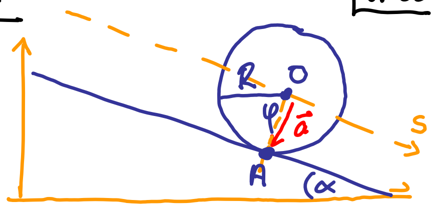


(1)

Für die Aufstellung von T wurde der Punkt O als Ursprung des körperfesten Koordinatensystems gewählt. Die Angabe $T_{rot} =$ bezieht sich auf Rotation um die Rotationssymmetrieachse O. Da dieser Punkt O sich selbst bewegt, ist zusätzlich ein Term $T_{transl.} =$ erforderlich.

Alternativ kann auch A als Ursprung eines Inertialsystems IS' gewählt werden, dessen Ursprung zum Zeitpunkt t am Berührungspunkt liegt.
Die momentane Geschw. von A ist null (kein Rutschen), deshalb ist
Aber, für T_{rot} muss Trägheitsmoment dann nicht bezüglich O, sondern bezüglich A berechnet werden!

Alternative Behandlung des rollenden Zylinders auf schiefer Ebene



Lagrange-Funktion: $L = T - V$

$=$ (1)

Kinetischen Energie: $T =$

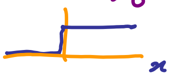
Zylinderlänge: ℓ

Trägheitstensor bezüglich A.

a) Gesamtmasse: $M = \int dx\,dy\,dz\;\rho(x^2+y^2, z)$

Dichte in Zylinderkoordinaten: $\rho(r,\varphi,z) = \begin{cases} & \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$ (2)

[Formale Notation: $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \forall\, x > 0 \\ 0 & \forall\, x < 0 \end{cases}$



$= \rho_0\, \Theta(R-r)\, \Theta(\ell/2 - z)\, \Theta(z + \ell/2)$]

$M \overset{(2)}{=}$ (4)

b) Winkelgeschwindigkeit: $\vec{\omega} = \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} =$ (1)

(egal ob bezüglich O oder A, siehe SK4)

Nur Θ_{zz} wird benötigt: $T_{rot} =$ (2)

(3)

[denn $ds = \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \omega_z = \dot{\varphi} =$]

a) Trägheitsmoment bezüglich Symmetrieachse des Zylinders, O

$$\Theta_{zz} = \int dx\,dy\,dz\;\rho(x^2+y^2, z) \quad (4)$$

$$= \overbrace{\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr\, r}^{\int dx\,dy\,dz} \quad (5)$$

a) Trägheitsmoment bezüglich Drehung um Punkt A :

Satz von Steiner: $$\Theta'_{zz} = \Theta_{zz} + M\left(\vec{a}^{\,2}\,\delta_{zz} - a_z a_z\right) \qquad (1)$$

(Einheitsvektor in radialer Richtung) (2)

$$\Theta'_{zz} \overset{(23.5)}{=} \qquad (3)$$

Kinetische Energie bei Drehung um A: $$T_{rot} \overset{(23.2)}{=} \frac{1}{2}\,\frac{\dot{s}^2}{R^2}\,\Theta'_{zz} \qquad (4)$$

Lagrange-Funktion: $$L \overset{(22.1)}{=} \frac{3}{4} M \dot{s}^2 + M g s \sin\alpha \qquad (5)$$

Lagrange-Gl. 2. Art: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = \frac{\partial L}{\partial s}$: (6)

Konsistent mit (L77.6) nach Korrektur!