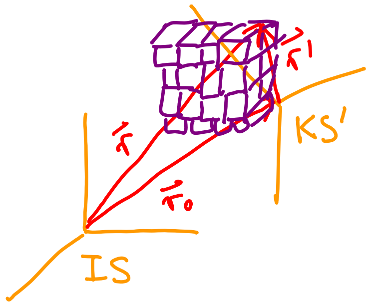
Kinetische Energie einer kontinuierlichen Massenverteilung

V19 17.6.07 SK12



Satz: Es gilt wieder: (vergleiche 10.2)

$$T = T_{trans} + T_{rot} \qquad (1)$$

Beweis:

$$T = \frac{1}{2}\int d^3r\, \rho_D(\vec r)\, \vec v^{\,2}(r) \qquad (2)$$

$\vec v(\vec r) :=$ Geschw. eines Volumenelements bei $\vec r$, bezüglich Ursprung v. IS.

Analog zu (3.1), (3.3):

$$\vec r = \vec r_0 + \vec r' , \qquad \vec v = \dot{\vec r} = \dot{\vec r}_0 + \vec\omega \times \vec r' \qquad (3)$$

(3) in (2):

$$T = \frac{1}{2}\int d^3r'\, \rho_D(\vec r' + \vec r_0)\, \left[\dot{\vec r}_0 + \vec\omega\times\vec r'\right]^2 \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int d^3r'\, \rho'_D(\vec r')}_{=M}\left[\dot{\vec r}_0^{\,2} + \underbrace{2\,\dot{\vec r}_0\cdot(\vec\omega\times\vec r')}_{=0} + (\vec\omega\times\vec r')^2\right] \qquad (5)$$

Wähle Ursprung v. KS' im Schwerpunkt, $\Rightarrow$ $\int d^3r' \rho(\vec r')\,\vec r' = 0$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec r}_0^{\,2}}_{T_{transl}} + 0 + \underbrace{\frac{1}{2}\int d^3r'\,\rho'_D(\vec r')\left[\vec\omega^2\cdot\vec r'^{\,2} - (\vec\omega\cdot\vec r')^2\right]}_{\frac{1}{2}\sum_{jm}\omega_j\,\Theta_{jm}\,\omega_m} \qquad (6)$$

(11.5) (7)

SK13

Bemerkung: Die ω_i in (12.5) sind die Projektionen der Winkelgeschwindigkeiten auf die Koordinatenachsen des körperfesten Bezugsystems.

Def: Unter Drehungen,

$$\vec r \to \vec r' = \hat R\,\vec r \qquad (1)$$

Drehmatrix

transformiert sich

(i) ein "Tensor 0. Stufe" (= Skalar) wie $S \to S' = S$ (invariant), z.B.: $\vec r\cdot\vec r$ (2)

(ii) ein "Tensor 1. Stufe" (= Vektor) wie $\vec A \to \vec A' = \hat R\,\vec A$ (also "wie Ortsvektor") (3)

(iii) ein "Tensor 2. Stufe" wie $I \to I' = \hat R\, I\, \hat R^T$ (4)

Indizes explizit:

$$A_i \to A'_i \overset{(3)}{=} R_{ij}A_j , \qquad I_{ij} \to I'_{ij} \overset{(4)}{=} R_{im}\, I_{mn}\, R^T_{nj} \qquad (4)$$

Eselsbrücke: Tensor 2.te Stufe verhält sich wie ein "Äußeres Produkt" zweier Vektoren, also "Spaltenvektor × Reihenvektor"

Satz: Trägheitstensor verhält sich unter Drehungen wie ein Tensor 2.ter Stufe

Beweis: laut Def.:

$$\Theta'_{ij} \overset{(11.5)}{=} \int d^3r' \, \rho'_D(\vec{r}') \left[\vec{r}'^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j \right] \quad (1)$$

$\vec{r}' \overset{(13.1)}{=} \hat{R}\vec{r}$ — $\hat{R}$ unabhängig von $\vec{r}$

Für Rotation: $R^{-1} = R^T$

$$= \int d^3r \, \rho_D(\vec{r}) \left[\vec{r}^2 \delta_{ij} - \sum_{mn} R_{im} r_m R_{jn} r_n \right] \quad (2)$$

Volumenelement unverändert

Länge = Skalar, unverändert

$\sum_m R_{im} R^T_{mj} = \delta_{ij}$

$$= \sum_{mn} R_{im} \underbrace{\left[\int d^3r \, \rho_D(\vec{r}) \left[\vec{r}^2 \delta_{mn} - r_m r_n \right] \right]}_{\Theta_{mn}} R^T_{nj} \quad (3)$$

R, R^T sind Ortsunabhängig, können aus Integral ausgeklammert werden

$$= \sum_{mn} R_{im} \Theta_{mn} R^T_{nj}, \quad \text{also wie Tensor 2. Stufe (siehe (13.4))} \quad (4)$$

Offenbar hängt Form von Θ von Wahl des Koordinatensystems ab – es ändert sich unter Drehungen! □

Vereinfachungen bei Berechnung von Θ sind möglich:

1. Vereinfachung: Wähle Ursprung von KS im Schwerpunkt ✓

2. Vereinfachung: **Satz:** Es gibt ein Koordinatensystem KS, in dem der Trägheitstensor diagonalform hat:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Bemerkung: Man bezeichnet die Transformation zu diesem KS als "Hauptachsentransf.", das entsprechende KS als "Hauptträgheitsachsensystem", und die Diagonalelemente als "Hauptträgheitsmomente".

Beweis: Θ ist reelle, symmetrische 3x3 Matrix: $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$ (2)

Aus linearen Algebra bekannt: $\Rightarrow$ Es existiert eine orthogonale Transf., die Θ diagonalisiert.

$$\Theta_{diag} = \hat{R} \, \Theta \, \hat{R}^T \quad (3)$$

Die orthogonale Transf. $\hat{R}$ wird dann gerade als Drehung interpretiert. □

SK16

Bemerkung:

Die allgemeine Form

$$\Theta_{ij} = \int_D d^3r \, \rho(\vec r) \left(\vec r^{\,2} \delta_{ij} - r_i r_j \right) \qquad (1)$$

vereinfacht sich in Hauptachsenbasis zu:

$$\Theta_{ij} = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & & \\ & \Theta_2 & \\ & & \Theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_x & & \\ & \Theta_y & \\ & & \Theta_z \end{pmatrix}$$

$$\Theta_x = \int dx\,dy\,dz \; \rho_D(\vec r) \left((\cancel{x^2} + y^2 + z^2)\,\delta_{11} - \cancel{x\,x} \right)$$

$$= \int dx\,dy\,dz \; \rho_D(\vec r) \left(y^2 + z^2 \right) \qquad (2a)$$

$$\Theta_y = \int dx\,dy\,dz \; \rho_D(\vec r) \left(z^2 + x^2 \right) \qquad (2b)$$

$$\Theta_z = \int dx\,dy\,dz \; \rho_D(\vec r) \left(x^2 + y^2 \right) \qquad (2c)$$

SK17

Erinnerung (lineare Algebra): Das Auffinden der Hauptträgheitsmomente ist gerade die Bestimmung der Eigenwerte der Matrix Θ:

Suche Vektoren $\vec a_i$, mit

$$\underset{\text{Matrix}}{\Theta}\, \vec a_i = \underbrace{\Theta_i}_{\text{Skalar}}\, \vec a_i \quad \text{(keine Summe über } i\text{)} \qquad \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Dies ist äquivalent zum Finden der Nullstellen von

$$\det\left(\Theta - \lambda \underset{\text{Einheitsmatrix}}{\mathbb{1}}\right) = 0 \qquad (2)$$

Jede Lösung λ von (2) ist eines der Hauptträgheitsmomente Θ_i.

Beachte, daß man die $\vec a_i$ normiert und orthogonal wählen kann (diese Wahl ist nur eindeutig, falls $\Theta_1 \neq \Theta_2 \neq \Theta_3$).

Bezeichnungen:

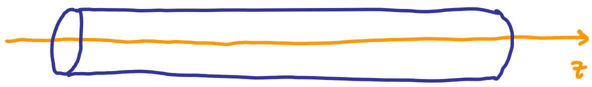
"unsymmetrischer Kreisel", falls: $\Theta_1 \neq \Theta_2$, $\Theta_2 \neq \Theta_3$, $\Theta_3 \neq \Theta_1$

"symmetrischer Kreisel", falls: $\Theta_1 = \Theta_2 \neq 3$

"Kugelkreisel", falls: $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$ (3)

Satz: Ist ein starrer Körper rotationssymmetrisch, liegt der Schwerpunkt auf dieser Achse und der Körper ist ein symmetrischer Kreisel. SK18

Beispiel: Zylinder



Drehachse

Beweis: Wähle z-Achse entlang Symmetrieachse.

Rotationssymmetrie bedeutet: $$\rho = \rho(\underbrace{x^2+y^2}, z) \qquad (1)$$

(x und y-Abhängigkeit kommen nur in dieser Kombination vor)

Folglich gilt für Komponenten des Schwerpunkts: $$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{M}\int dx\,dy\,dz\ \rho_D(x^2+y^2, z) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{Bmatrix}, \qquad (2)$$

{}: Kurznotation für 3 getrennte Gleichungen.

Also liegt Schwerpunkt auf z-Achse: $$\vec{R}_S := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

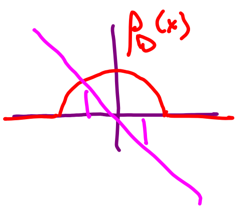
Trägheitstensor: SK19

$$\Theta_1 := \Theta_{xx} \overset{(16.2a)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,dz\ \rho_D(x^2+y^2, z)\,\underbrace{(x^2+y^2+z^2-x^2)}_{(y^2+z^2)} \qquad (1)$$

Umbenennung der Integrationsvariablen:

$$\overset{x\leftrightarrow y}{=} \int dy \int dx \int dz\ \underbrace{\rho_D(y^2+x^2, z)}_{=\rho_D(x^2+y^2,z)}\ \underbrace{(x^2+z^2)}_{(x^2+y^2+z^2-y^2)} \qquad (2)$$

$$= \int dy \int dx \int dz\ \rho_D(x^2+y^2, z)\,(x^2+z^2) \overset{(16.2b)}{=} \Theta_{yy} =: \Theta_2$$



$$\Theta_{xy} \overset{(16.2a)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,dz\ \rho_D(x^2+y^2, z)\,(0 - xy) = 0 \qquad (3)$$

$$\overset{x\to -x}{=} \underbrace{\int_{+\infty}^{-\infty} (-dx)}_{\int_{-\infty}^{\infty} dx} \int dy \int dz\ \rho_D((-x)^2+y^2, z)\,(-(-x)y) = -(3) \qquad (4a)$$

(Integrand Antisymmetrisch unter $x \to -x$) (4b)

Analog:

$$\Theta_{yz} = 0$$
$$\Theta_{zx} = 0$$

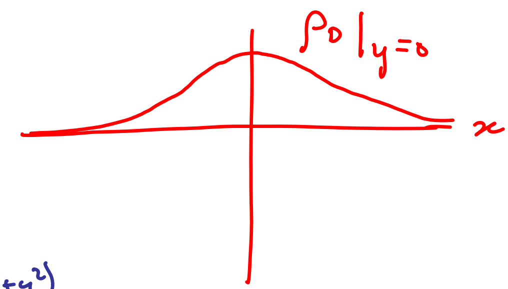
$\Theta_{xy} = -\Theta_{xy} \Rightarrow$
$\Theta_{xy} = 0.$

Folglich:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{zz} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Bemerkung: Die Hauptträgheitsachsen fallen mit den Symmetrieachsen des starren Körpers zusammen.

Beispiel: $\rho_D = \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{1/2}}$



$$\Theta_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \, \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{1/2}} \, (z^2+y^2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x}' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \, \frac{1}{(\bar{x}'^2+y'^2+a^2)^{1/2}} \, (\bar{z}^2+y'^2)$$

$x \to \bar{x} \to \bar{x}' \to y$

$y \to x$

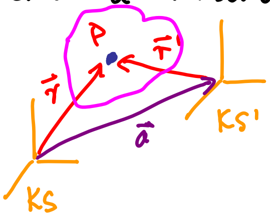
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int d\bar{y}'^2 \, \frac{1}{(y^2+\bar{y}'^2+a^2)} \, (\bar{z}'^2 + y^2)$$

$$\overset{\bar{y}' \to x}{=} \int_{-\infty} dy \int dx \, \frac{1}{(y^2+x^2+a^2)} \, (\bar{z}'^2 + x^2) = \Theta_{yy}$$

Satz von Steiner

SK20

Sei Θ der Trägheitstensor, berechnet bezüglich des Schwerpunkts in KS. Sei KS' ein zu KS achsenparalleles Koordinatensystem, das um einen Vektor $\vec{a}$ verschoben ist. Dann gilt für Trägheitstensoren bezüglich KS':



$$\boxed{\Theta'_{ij} = \Theta_{ij} + \underbrace{M}_{\text{Gesamtmasse}} \left(\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j \right)} \qquad (1)$$

Beweis:

$$\Theta'_{ij} = \int d^3r' \, \rho'_D(\vec{r}') \left[\vec{r}'^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j \right] \qquad (2)$$

$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$

$$= \int d^3r \, \rho_D(\vec{r}) \left[(\vec{r}+\vec{a})^2 \delta_{ij} - (r_i+a_i)(r_j+a_j) \right]$$

$a_i \overbrace{\int d^3r \, \rho_D(\vec{r}) \, r_j}^{\sim R_j/M = 0}$

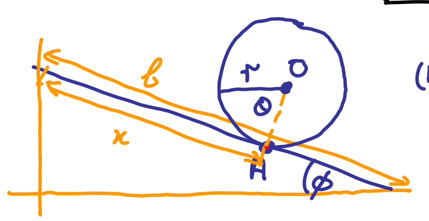
Terme linear in r liefern 0, da Ursprung von KS im Schwerpunkt liegt.

$$= \underbrace{\int d^3r \, \rho_D(\vec{r})}_{M} \Big[\underbrace{\left(\vec{r}^2 \delta_{ij} - r_i r_j \right)}_{\to \Theta_{ij}} + \underbrace{\left(2\, \vec{a}\cdot\vec{r} \, \delta_{ij} - a_i r_j - r_i a_j \right)}_{\to 0} + \left(\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j \right) \Big] \qquad (3)$$

$\square$

Wiederholung: rollender Reifen auf schiefer Ebene. SK21

Auf Seite L76 wurde angegeben:



(1)

Kinetische Energie $T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M r^2\right)\dot{\theta}^2}^{\frac{1}{2} I \omega^2}$

Potenzielle Energie: $V = Mg(l-x)\sin\phi$

Für die Aufstellung von T wurde der Punkt $\underline{O}$ als Ursprung des körperfesten Koordinatensystems gewählt. Die Angabe $T_{rot} = \frac{1}{2}\omega_i \Theta_{ij} \omega_j$ bezieht sich auf Rotation um die Rotationssymmetrieachse O. Da dieser Punkt O sich selbst bewegt, ist zusätzlich ein Term $T_{transl.} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$ erforderlich.

$\frac{1}{2}(0\;0\;\omega)\begin{pmatrix} I' & & \\ & I' & \\ & & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix} = \frac{1}{2} I \omega^2$

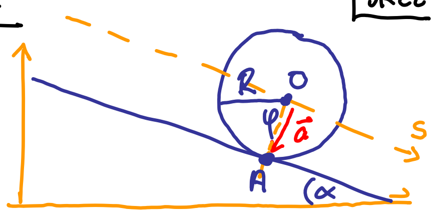
Θ_{zz}

Alternativ kann auch A als (instantaner) Ursprung eines Inertialsystems IS' gewählt werden, dessen Ursprung zum Zeitpunkt t am Berührungspunkt liegt.

Die momentane Geschw. von A ist null (kein Rutschen), deshalb ist $T_{transl.} = 0$

Aber, für T_{rot} muss Trägheitsmoment dann nicht bezüglich O, sondern bezüglich A berechnet werden!

Alternative Behandlung des rollenden Zylinders auf schiefer Ebene SK22



Lagrange-Funktion: $L = T - V$

$= T - Mg(-s)\sin\alpha$ (1)

Bezugspunkt: A

Kinetische Energie: $T_{rot} = \frac{1}{2}\omega_i \Theta'_{ij} \omega_j$

$T_{transl.} = 0$

Zylinderlänge: l

Trägheitstensor bezüglich A.

a) Gesamtmasse: $M = \int dx\, dy\, dz\; \rho(x^2+y^2, z)$

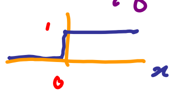
Dichte in Zylinderkoordinaten:

$$\rho(r,\varphi,z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \le R, \text{ und } z \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases} \quad (2)$$

$$= \rho_0\, \underbrace{\theta(R-r)}_{:\, r<R}\, \underbrace{\theta(l/2 - z)}_{z < l/2}\, \underbrace{\theta(z + l/2)}_{z > -l/2}, \text{ ansonsten } 0.$$

Formale Notation:

$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \forall\, x > 0 \\ 0 & \forall\, x < 0 \end{cases}$



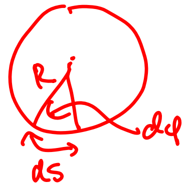
$$M \overset{(2)}{=} \int_{-l/2}^{l/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr\, r\, \rho_0 = l\, 2\pi \frac{R^2}{2} \rho_0 \quad (4)$$

SK23

b) Winkelgeschwindigkeit: $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{z} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix}$ (1)

(egal ob bezüglich O oder A, siehe SK4)

Nur Θ_{zz} wird benötigt: $T_{rot} = \frac{1}{2}\,\omega_z^2\,\Theta'_{zz} = \frac{1}{2}\,\frac{\dot{s}^2}{R^2}\,\Theta'_{zz}$ (2)



(3) $\left[\text{denn } ds = R\,d\varphi \;\Rightarrow\; \dot{s} = R\dot{\varphi} \;\Rightarrow\; \omega_z = \dot{\varphi} = \dot{s}/R\right]$

a) Trägheitsmoment bezüglich Symmetrieachse des Zylinders, O

$$I = \Theta_{zz} = \int dx\,dy\,dz\;\rho(x^2+y^2, z)\,\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2} \qquad (4)$$

$$\overset{(22.4)}{=} \overbrace{\int_{-l/2}^{l/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr\,r}^{\int dx\,dy\,dz}\;\rho_0\, r^2 = l\,2\pi\,\rho_0\,\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2 \qquad (5)$$

SK24

a) Trägheitsmoment bezüglich Drehung um Punkt A:

Satz von Steiner: $\Theta'_{zz} \overset{(20.1)}{=} \Theta_{zz} + M\left(\vec{a}^{\,2}\,\delta_{zz} - a_z a_z\right)$ (1)

mit $\vec{a} = R\hat{r}$ (Einheitsvektor in radialer Richtung) $\Rightarrow a_z = 0$ (2)

$\Theta'_{zz} \overset{(23.5)}{=} \frac{1}{2}MR^2 + M\left(R^2\right) = \frac{3}{2}MR^2$ (3)

Kinetische Energie bei Drehung um A: $T_{rot} \overset{(23.2)}{=} \frac{1}{2}\,\frac{\dot{s}^2}{R^2}\,\Theta'_{zz} = \frac{3}{4}M\dot{s}^2$ (4)

Lagrange-Funktion: $L \overset{(22.1)}{=} \frac{3}{4}M\dot{s}^2 + Mgs\sin\alpha$ (5)

Lagrange-Gl. 2. Art: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = \frac{\partial L}{\partial s}$: $\frac{3}{2}M\ddot{s} = Mg\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad g_{eff} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$ (6)

Konsistent mit (L77.6) nach Korrektur!