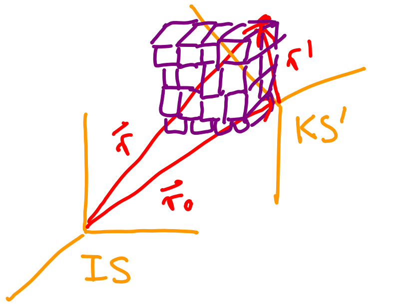
Kinetische Energie einer kontinuierlichen Massenverteilung

v19 17.6.07 SK12



Satz: Es gilt wieder: (vergleiche 10.2)

$$T = T_{trans} + T_{rot} \qquad (1)$$

Beweis:

$$T = \frac{1}{2}\int d^3r\; \rho_D(\vec r)\; \vec v^{\,2}(\vec r) \qquad (2)$$

$\vec v(\vec r) :=$ Geschw. eines Volumenelements bei $\vec r$, bezüglich Ursprung v. IS.

Analog zu (3.1), (3.3):

$$\vec r = \vec r_0 + \vec r' , \qquad \dot{\vec r} = \dot{\vec r}_0 + \vec\omega \times \vec r' \qquad (3)$$

(3) in (2):

$$T = \frac{1}{2}\int d^3r'\; \rho_D(\vec r' + \vec r_0)\; \left[\dot{\vec r}_0 + \vec\omega\times\vec r'\right]^2 \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r'\; \rho'_D(\vec r')\left[\dot{\vec r}_0^{\,2} + \underbrace{2\,\dot{\vec r}_0\cdot(\vec\omega\times\vec r')}_{=0} + (\vec\omega\times\vec r')^2\right] \qquad (5)$$

Wähle Ursprung v. KS' im Schwerpunkt, ⇒ $\int d^3r'\rho(\vec r')\,\vec r' = 0$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec r}_0^{\,2}}_{T_{transl.}} + 0 + \underbrace{\frac{1}{2}\int d^3r'\; \rho'_D(\vec r')\left[\vec\omega^{\,2}\cdot\vec r'^{\,2} - (\vec\omega\cdot\vec r')^2\right]}_{\frac{1}{2}\sum_{jm}\omega_j\,\Theta_{jm}\,\omega_m} \qquad (6)\ (7)$$

SK13

Bemerkung: Die ω_i in (12.5) sind die Projektionen der Winkelgeschwindigkeiten auf die Koordinatenachsen des körperfesten Bezugsystems.

Def: Unter Drehungen,

$$\vec r \to \vec r' = \underset{}{\overset{\text{Drehmatrix}}{\hat R}}\, \vec r \qquad \begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix} \qquad (1)$$

transformiert sich

(i) ein "Tensor 0. Stufe" (= Skalar) wie $S \to S' = S$ (invariant) (2)

(ii) ein "Tensor 1. Stufe" (= Vektor) wie $\vec A \to \vec A' = \hat R \vec A$ (also "wie Ortsvektor") (3)

(iii) ein "Tensor 2. Stufe" wie $I \to I' = \hat R\, I\, \hat R^T$ (4)

Indizes explizit:

[Einsteinsche Konv.]

$$A_i \to A'_i \overset{(3)}{=} R_{ij} A_j , \qquad I_{ij} \to I'_{ij} \overset{(4)}{=} R_{im} I_{mn} R^T_{nj} \qquad (4)$$

$$\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}(\cdot\cdot\cdot)' , \qquad \begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}(\cdot\cdot\cdot)$$

Eselsbrücke: Tensor 2.te Stufe verhält sich wie ein "Äuseres Produkt" zweier Vektoren, also "Spaltenvektor × Reihenvektor"

Satz: Trägheitstensor verhält sich unter Drehungen wie ein Tensor 2.ter Stufe

Beweis: laut Def:

$\vec{r}\,'^{(13.1)} = \hat{R}\vec{r}$

$$\Theta'_{ij} \overset{(11.5)}{=} \int d^3r' \rho'_D(\vec{r}\,') \left[\vec{r}\,'^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j \right] \quad (1)$$

$$= \int \underbrace{d^3r}_{\text{Volumenelement unverändert}} \rho_D(\vec{r}) \left[\underbrace{\vec{r}^2}_{\text{Länge = Skalar, unverändert}} \delta_{ij} - \sum_{mn} R_{im} r_m R_{jn} r_n \right] \quad (2)$$

$R_{im} R^T_{mj} = \delta_{ij}$

$$= \sum_{mn} R_{im} \left[\underbrace{\int d^3r \rho_D(\vec{r}) \left[\vec{r}^2 \delta_{mn} - r_m r_n \right]}_{\Theta_{mn}} \right] R^T_{nj} \quad (3)$$

$R, R^\dagger$ sind Ortsunabhängig, können aus Integral ausgeklammert werden

$$= \sum_{mn} R_{im} \Theta_{mn} R^T_{nj}, \quad \text{also wie Tensor 2. Stufe, siehe (13.4)} \quad (4)$$

Offenbar hängt vorm von Θ von Wahl des Koordinatensystems ab – es ändert sich unter Drehungen! □

Vereinfachungen bei Berechnung von Θ sind möglich:

1. Vereinfachung: Wähle Ursprung von KS im Schwerpunkt ✓

2. Vereinfachung: **Satz:** Es gibt ein Koordinatensystem KS, in dem der Trägheitstensor diagonalform hat:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Bemerkung: Man bezeichnet die Transformation zu diesem KS als "Hauptachsentransf.", das entsprechende KS als "Hauptträgheitsachsensystem", und die Diagonalelemente als "Hauptträgheitsmomente".

Beweis: Θ ist reelle, symmetrische 3x3 Matrix: $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$ (2)

Aus linearen Algebra bekannt: $\Rightarrow$ Es existiert eine orthogonale Transf., die Θ diagonalisiert.

$$\Theta_{diag} = \hat{R}\,\Theta\,\hat{R}^T \quad (3)$$

Die orthogonale Transf. $\hat{R}$ wird dann gerade als Drehung interpretiert. □

Bemerkung: SK16

Die allgemeine Form
$$\Theta_{ij} = \int_D d^3r\, \rho(\vec r)\,(\vec r^{\,2}\delta_{ij} - r_i r_j) \quad (1)$$

vereinfacht sich in Hauptachsenbasis zu:
$$\Theta = \Theta_x = \int dx\,dy\,dz\, \rho_D(\vec r)\,[(x^2+y^2+z^2)\delta_{11} - x x]$$
$$= \int dx\,dy\,dz\, \rho_D(\vec r)\,(y^2+z^2) \quad (2a)$$

$$\Theta_y = \int dx\,dy\,dz\, \rho_D(\vec r)\,(z^2+x^2) \quad (2b)$$

$$\Theta_z = \int dx\,dy\,dz\, \rho_D(\vec r)\,(x^2+y^2) \quad (2c)$$

Erinnerung (lineare Algebra): Das Auffinden der Hauptträgheitsmomente ist gerade die Bestimmung der Eigenwerte der Matrix Θ: SK17

Suche Vektoren $\vec a_i$, mit
$$\underset{\text{Matrix}}{\Theta}\,\vec a_i = \underset{\text{Skalar}}{\Theta_i}\,\vec a_i \qquad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (1)$$

Dies ist äquivalent zum Finden der Nullstellen von
$$\det[\Theta - \lambda \underbrace{\mathbb{1}}_{\text{Einheitsmatrix}}] = 0 \quad (2)$$

Jede Lösung λ ist eines der Hauptträgheitsmomente Θ_i.

Beachte, daß man die $\vec a_i$ normiert und orthogonal wählen kann (diese Wahl ist nur eindeutig, falls $\Theta_1 \neq \Theta_2 \neq \Theta_3$).

Bezeichnungen:

"unsymmetrischer Kreisel", falls: $\Theta_1 \neq \Theta_2$, $\Theta_2 \neq \Theta_3$, $\Theta_3 \neq \Theta_1$

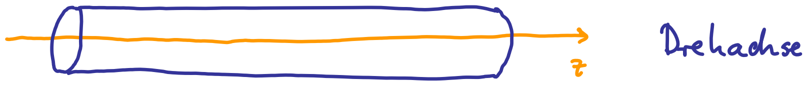
"symmetrischer Kreisel," falls: $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$ (3)

"Kugelkreisel", falls: $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$

SK18

<u>Satz:</u> Ist ein starrer Körper rotationssymmetrisch, liegt der Schwerpunkt auf dieser Achse und der Körper ist ein symmetrischer Kreisel.

Beispiel: Zylinder



<u>Beweis:</u> Wähle z-Achse entlang Symmetrieachse.

Rotationssymmetrie bedeutet: $$\rho = \rho(x^2+y^2, z) \qquad (1)$$

Folglich gilt $$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} = \int dx\,dy\,dz\; \rho_D(x^2+y^2, z) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

{ }: Kurznotation für 3 getrennte Gleichungen.

Also liegt Schwerpunkt auf z-Achse: $$R_S = (0, 0, z_1) \qquad (3)$$

SK19

Trägheitstensor: $$\Theta_{xx} = \int dx\,dy\,dz\; \rho_D(x^2+y^2, z)\, (\underbrace{x^2+y^2+z^2 - x^2}_{y^2+z^2}) \qquad (1)$$

Umbenennung der Integrationsvariablen: $$\overset{x \leftrightarrow y}{=} \int dy \int dx \int dz\; \underbrace{\rho_D(y^2+x^2, z)}_{\rho_D(x^2+y^2, z)}\, (\underbrace{x^2+z^2}_{(x^2+y^2+z^2-y^2)}) \qquad (2)$$

$$= \Theta_{yy} =: \Theta_1$$

$$\Theta_{xy} \overset{(16.2a)}{=} \int dx\,dy\,dz\; \rho_D(x^2+y^2, z)\, (0 - xy) = 0 \qquad (3)$$

folgt aus $x \to -x$ oder $y \to -y$

Analog: $$\Theta_{yz} = 0 \qquad (4a)$$

$$\Theta_{zx} = 0 \qquad (4b)$$

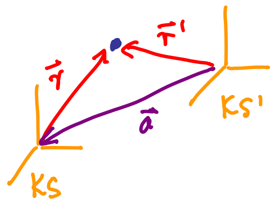
Folglich: $$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{zz} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Bemerkung: Die Hauptträgheitsachsen fallen mit den Symmetrieachsen des starren Körpers zusammen.

Satz von Steiner

SK20

Sei Θ der Trägheitstensor, berechnet bezüglich des Schwerpunkts in KS.
Sei KS' ein zu KS achsenparalleles Koordinatensystem, das um einen Vektor $\vec{a}$ verschoben ist. Dann gilt für Trägheitstensoren bezüglich KS':



$$\Theta'_{ij} = \Theta_{ij} + \underbrace{M}_{\text{Gesamtmasse}}\left(\vec{a}^2\,\delta_{ij} - a_i a_j\right) \qquad (1)$$

Beweis:

$$\Theta'_{ij} = \int d^3r'\, \rho'_D(\vec{r}\,')\left[\vec{r}\,'^2\,\delta_{ij} - r'_i r'_j\right] \qquad (2)$$

$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{a}$

$$= \int d^3r\, \underbrace{\rho'_D(\vec{r}+\vec{a})}_{\rho_D(\vec{r})}\left[(\vec{r}+\vec{a})^2\,\delta_{ij} - (r_i+a_i)(r_j+a_j)\right]$$

$$= \int d^3r\, \rho_D(\vec{r})\Big[\underbrace{\left(\vec{r}^2\,\delta_{ij} - r_i r_j\right)}_{\to\,\Theta_{ij}} + \underbrace{\left(2\,\vec{a}\cdot\vec{r}\,\delta_{ij} - a_i r_j - r_i a_j\right)}_{\to\,0} + \left(\vec{a}^2\,\delta_{ij} - a_i a_j\right)\Big] \qquad (3)$$

Terme linear in r liefern 0, da Ursprung von KS im Schwerpunkt liegt.

□

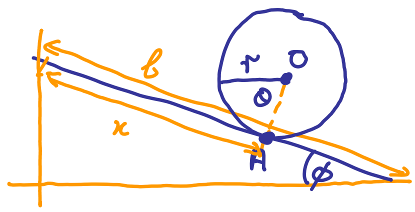
Wiederholung: rollender Reifen auf schiefer Ebene.

SK21

Auf Seite L76 wurde angegeben: $\frac{1}{2} I \omega^2$

Kinetische Energie $T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M r^2\right)\dot{\theta}^2$ (1)

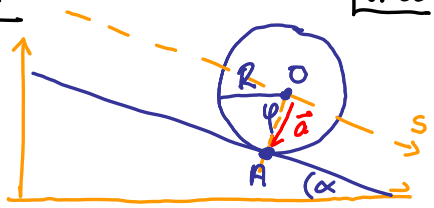
Potenzielle Energie: $V = Mg(l - x)\sin\phi$



Für die Aufstellung von T wurde der Punkt O als Ursprung des körperfesten Koordinatensystems gewählt. Die Angabe $T_{rot} = \frac{1}{2}\omega_i \Theta_{ij}\omega_j$ bezieht sich auf Rotation um die Rotationssymmetrieachse O. Da dieser Punkt O sich selbst bewegt, ist zusätzlich ein Term $T_{transl.} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$ erforderlich.

Alternativ kann auch A als Ursprung eines Inertialsystems IS' gewählt werden, dessen Ursprung zum Zeitpunkt t am Berührungspunkt liegt.
Die momentane Geschw. von A ist null (kein Rutschen), deshalb ist $T_{transl} = 0$
Aber, für T_{rot} muss Trägheitsmoment dann nicht bezüglich O, sondern bezüglich A berechnet werden!

Alternative Behandlung des rollenden Zylinders auf schiefer Ebene



Lagrange-Funktion: $L = T - V$

$$= T - Mg(-s)\sin\alpha \qquad (1)$$

Kinetischen Energie: $T = \frac{1}{2}\,\omega_i\,\Theta'_{ij}\,\omega_j$

Trägheitstensor bezüglich A.

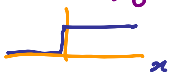
Zylinderlänge: ℓ

a) Gesamtmasse: $M = \int dx\,dy\,dz\;\rho(x^2+y^2, z)$

Dichte in Zylinderkoordinaten:

$$\rho(r,\varphi,z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \le R \text{ und } z \in [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}] \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases} \qquad (2)$$

[Formale Notation: $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \forall\, x > 0 \\ 0 & \forall\, x < 0 \end{cases}$



$$= \rho_0\,\Theta(R-r)\,\Theta(\ell/2 - z)\,\Theta(z+\ell/2)$$]

$$M \overset{(2)}{=} \underbrace{\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr\, r}_{\int dx\,dy\,dz}\;\rho_0 = \ell\, 2\pi\, \frac{R^2}{2}\,\rho_0 \qquad (4)$$

---

b) Winkelgeschwindigkeit: $\vec\omega = \dot\varphi\,\hat z \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ \dot\varphi\end{pmatrix}$ (1)

(egal ob bezüglich O oder A, siehe SK 4)

Nur Θ_{zz} wird benötigt: $T_{rot} = \frac{1}{2}\,\omega_z^2\,\Theta'_{zz} = \frac{1}{2}\,\frac{\dot s^2}{R^2}\,\Theta'_{zz}$ (2)

(3) [denn $ds = R\,d\varphi \;\Rightarrow\; \dot s = R\dot\varphi \;\Rightarrow\; \omega_z = \dot\varphi = \dot s/R$]

a) Trägheitsmoment bezüglich Symmetrieachse des Zylinders, O

$$\Theta_{zz} = \int dx\,dy\,dz\;\rho(x^2+y^2, z)\,(x^2+y^2) \qquad (4)$$

$$= \underbrace{\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr\, r}_{\int dx\,dy\,dz}\;\rho_0\,\overbrace{r^2}^{x^2+y^2} = \ell\, 2\pi\,\rho_0\,\frac{R^4}{4} \overset{(22.2)}{=} \frac{1}{2}\,M R^2 \qquad (5)$$

SK24

a) Trägheitsmoment bezüglich Drehung um Punkt A:

Satz von Steiner: $$\Theta'_{zz} = \Theta_{zz} + M\left(\vec{a}^{\,2}\,\delta_{zz} - a_z a_z\right) \qquad (1)$$

mit $\vec{a} = R\,\hat{\rho}$ (Einheitsvektor in radialer Richtung) (2)

$$\Theta'_{zz} \overset{(23.5)}{=} \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 = \frac{3}{2} M R^2 \qquad (3)$$

Kinetische Energie bei Drehung um A: $$T_{rot} \overset{(23.2)}{=} \frac{1}{2} \frac{\dot{s}^2}{R^2}\,\Theta'_{zz} \overset{(3)}{=} \frac{3}{4} M \dot{s}^2 \qquad (4)$$

Lagrange-Funktion: $$L \overset{(22.1)}{=} \frac{3}{4} M \dot{s}^2 + M g s \sin\alpha \qquad (5)$$

Lagrange-Gl. 2. Art: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = \frac{\partial L}{\partial s}$:
$$\frac{3}{2} M \ddot{s} = M g \sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad g_{eff} = \frac{2}{3} g \sin\alpha \qquad (6)$$

Konsistent mit (L77.4).