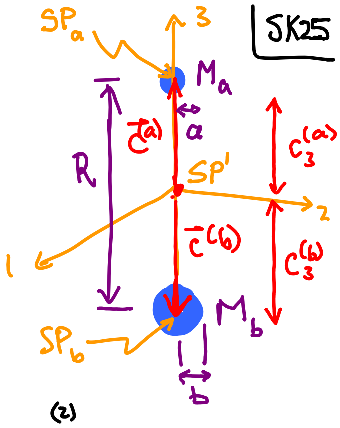
Beispiel: Hantel mit 2 Massen V20- 19.06.08 SK25



Trägheitsmomente für M_a, M_b bezüglich ihrer Mittelpunkte bei SP_a, SP_b:

$$\Theta^a_{11} = \Theta^a_{22} = \Theta^a_{33} =$$
$$\Theta^b_{11} = \Theta^b_{22} = \Theta^b_{33} = \quad (1)$$

Gesamt TM bezüglich gemeinsamen SP:

$$\Theta'_{jm} \overset{(14.2)}{=} \Theta^a_{jm} + M_a\left[\left(\vec{c}^{(a)}\right)^2 \delta_{jm} - \vec{c}^{(a)}_j \cdot \vec{c}^{(a)}_m\right]$$
$$\Theta^b_{jm} + M_b\left[\left(\vec{c}^{(b)}\right)^2 \delta_{jm} - \vec{c}^{(b)}_j \cdot \vec{c}^{(b)}_m\right] \quad (2)$$

Für M_a:

Für M_b: (3)

Symmetrie um Hantelachse

$$\Theta^G_{11} \overset{\text{Symmetrie}}{=} \Theta^G_{22} \overset{(2)}{=} \frac{2}{5} M_a a^2 + M_a\left[\left(\frac{M_b R}{M_a + M_b}\right)^2 - 0\right] \quad \frac{2}{5} M_b b^2 + \left[M_b \left(\frac{M_a R}{M_a + M_b}\right)^2 - 0\right] \quad (4)$$

$$\Theta^G_{33} \overset{(3)}{=} \frac{2}{5} M_a a^2 + 0 + \frac{2}{5} M_b b^2 + 0 \quad (5)$$

Weitere Schreibweise für Rotationsenergie: SK26

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j I_{jm} \omega_m = \boxed{} \quad (1)$$

wobei

$$\hat{I} \equiv \quad (2)$$

"Dyade" "Dyadisches Produkt"

Def: Dyadisches Produkt, liefert bei Skalarmultiplikation mit einem Vektor $\vec{a}$:

$$(\hat{e}_j \circ \hat{e}_m) \quad , \text{ und } \quad (\hat{e}_j \circ \hat{e}_m) \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \circ (\cdots) \qquad \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \circ (\cdots) \quad (4)$$

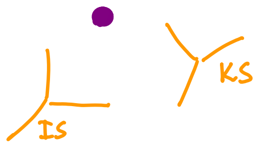
Check (1)

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left(\sum_{jm} I_{jm} \hat{e}_j \circ \hat{e}_m\right) \cdot \vec{\omega} \quad (5)$$

Drehimpuls

(hängt vom Bezugspunkt ab)

Satz: Der Drehimpuls des starren Körpers bezüglich eines beliebigen Punkts kann zerlegt werden in den Drehimpuls des Schwerpunkts bzgl. dieses Punktes und den Relativdrehimpuls:



$$\vec L_{tot} = \qquad (1)$$

Beweis: für jeden Massenpunkt gilt: $\vec r_\nu =$ (2)

Gesamtdrehimpuls: $\vec L_{tot} = \sum_\nu m_\nu \, \vec r_\nu \times \dot{\vec r}_\nu \overset{(2)}{=} \sum_\nu m_\nu \left(\vec r_s + \vec r_\nu^{(KS)}\right) \times \left(\dot{\vec r}_s + \left(\frac{d\vec r^{(KS)}}{dt}\right)_{IS}\right)$

Zeitableitung bezieht sich auf ein Inertialsystem.

$$= \sum_\nu m_\nu \Big[\qquad + \qquad + \qquad + \qquad \Big]$$

per Definition

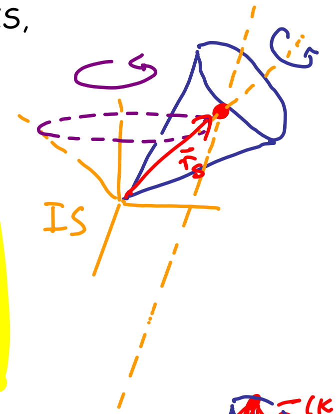
Schwerpunkt liegt in KS bei und ruht, (4)

$=$ (5)

Im Folgenden wählen wir ein Inertialsystem IS' in dem der Schwerpunkt momentan ruht (SP-System) (d.h. IS' bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit bzgl. IS,

(1)

so, dass zum momentanen Zeitpunkt t gilt: (2)

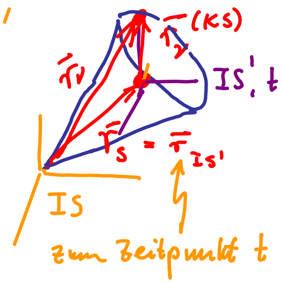


Trägheitstensor

Satz:
Im SP-System IS' gilt: (3)

Beweis:
zum momentanen Zeitpunkt t gilt, aus Sicht von IS':

$$\vec L_{tot} \overset{(26.1)}{=} M \, \vec r_S \times \dot{\vec r}_S + \sum_\nu m_\nu \vec r_\nu^{(KS)} \times \left(\frac{d\vec r_\nu^{(KS)}}{dt}\right)_{IS} \qquad (4)$$



$\vec A \times (\vec B \times \vec C) = \vec B(\vec A\cdot\vec C) - \vec C(\vec A\cdot\vec B)$

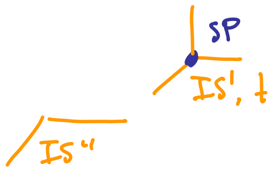
$=$ (5)

j-Komponente: (6)

$=$

Analog für kontinuierliche Massenverteilung.

Bemerkung: die Herleitung verläuft analog für den Drehimpuls relativ zu einem anderen Inertialsystem, IS'', (um verschoben relativ zum SP), in dem ein anderer körperfester Punkt (statt des SP) momentan ruht:



$$\left(\vec{L}_{tot}\right)_{IS''} = \sum_\nu m_\nu \, \vec{r}_\nu'' \times \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}''}{dt}\right)_{IS''}}_{= \vec{\omega} \times \vec{r}''}$$

$$\left(\vec{L}_{tot}\right)_{IS''} \overset{(28.6)}{=} \sum_{jm} \hat{e}_j \sum_\nu m_\nu \left[(\vec{r}_\nu'')^2 \delta_{jm} - r''_{\nu,j} \, r''_{\nu,m} \right] \omega_m$$

Trägheitstensor bezüglich IS''

Steinersche Satz:

$$=$$

$$\left(\vec{L}_{tot}\right)_{IS''} =$$

(wie erwartet!)

Drehimpuls vom SP relativ zu IS''

Drehmoment (Erinnerung):

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{IS} = \sum_\nu m_\nu \left(\dot{\vec{r}}_\nu \times \dot{\vec{r}}_\nu + \vec{r}_\nu \times \ddot{\vec{r}}_\nu \right) \qquad (1)$$

$$= \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu = \vec{M} \qquad (2)$$

↑ Gesamtdrehmoment

Ziel: diese Gl. im körperfesten System KS ausdrücken:

$$\vec{L}(t) = \qquad (3)$$

Körperfestes Bezugsystem

$$\left(\frac{d\vec{L}(t)}{dt}\right)_{IS} = \qquad (4)$$

$$= \qquad (5)$$

(5) in (2): (6)

Im folgenden lassen wir immer (KS) konsistent weg, und schreiben [KS3]

$$\vec{M}^{(KS)} := \quad , \quad \vec{L}^{(KS)} = \quad , \quad \vec{\omega}^{(KS)} = \qquad (1)$$

3

Im Hauptachsensystem gilt: I diagonal!

$$\vec{L} = \hat{I}\cdot\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{L}_j^{(KS)}: \begin{pmatrix}\dot{L}_1\\ \dot{L}_2\\ \dot{L}_3\end{pmatrix} = \qquad (2)$$

da I zeitunabhängig ist! Vorteil vom Körperfesten System!!

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:
Satz: im Schwerpunkts- und Hauptachsensystem wird Bewegung es starren Körpers durch die "Eulerschen Gleichungen" beschrieben

$$M_j^{(KS)} \overset{(30.6)}{=} \dot{L}_j^{(KS)} + (\vec{\omega}\times\vec{L})_j^{(KS)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_1 &= \\ M_2 &= \\ M_3 &= \end{aligned}} \qquad \begin{matrix}(3a)\\(3b)\\(3c)\end{matrix}$$

(mit Komponenten von ω_j und M_j bezogen auf das körperfeste Hauptachsensystem):