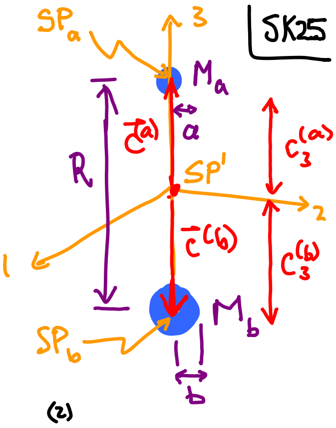
## Beispiel: Hantel mit 2 Massen

v20- 19.06.08

SK25



Trägheitsmomente für $M_a, M_b$ bezüglich ihrer Mittepunkte bei $SP_a$, $SP_b$:

$$\Theta^a_{11} = \Theta^a_{22} = \Theta^a_{33} = \frac{2}{5} M_a a^2 \qquad (1)$$
$$\Theta^b_{11} = \Theta^b_{22} = \Theta^b_{33} = \frac{2}{5} M_b b^2$$

Gesamt TM bezüglich gemeinsamen SP:

$$\begin{aligned}\Theta'_{jm} \overset{(14.2)}{=} {} & \Theta^a_{jm} + M_a\left[\left(\vec c^{(a)}\right)^2 \delta_{jm} - c_j^{(a)} c_m^{(a)}\right] \\ & \Theta^b_{jm} + M_b\left[\left(\vec c^{(b)}\right)^2 \delta_{jm} - c_j^{(b)} c_m^{(b)}\right] \qquad (2)\end{aligned}$$

Für $M_a$: $c_1^{(a)} = c_2^{(a)} = 0$, $c_3^{(a)} = \dfrac{M_b R}{M_a + M_b}$

Für $M_b$: $c_1^{(b)} = c_2^{(b)} = 0$, $c_3^{(b)} = -\dfrac{M_a R}{M_a + M_b}$ (3)

Symmetrie um Hantelachse

$$\Theta^S_{11} \overset{\downarrow}{=} \Theta^S_{22} \overset{(2)}{=} \frac{2}{5} M_a a^2 + M_a\left[\left(\frac{M_b R}{M_a + M_b}\right)^2 - 0\right] + \frac{2}{5} M_b b^2 + \left[M_b\left(\frac{M_a R}{M_a + M_b}\right)^2 - 0\right] \qquad (4)$$

$$\Theta^S_{33} \overset{(3)}{=} \frac{2}{5} M_a a^2 + \overbrace{0}^{[\vec c^2 - c_3 c_3] = 0} + \frac{2}{5} M_b b^2 + 0 \qquad (5)$$

---

## Weitere Schreibweise für Rotationsenergie:

SK26

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j I_{jm} \omega_m = \boxed{\frac{1}{2} \vec\omega \cdot \hat I \cdot \vec\omega} \qquad (1)$$

wobei

$$\boxed{\underset{\text{"Dyade"}}{\hat I} \equiv \sum_{jm} I_{jm} \hat e_j \underset{\text{"Dyadisches Produkt"}}{\circ} \hat e_m} \qquad (2)$$

Def: Dyadisches Produkt, liefert bei Skalarmultiplikation mit einem Vektor $\vec a$:

$$(\hat e_j \circ \hat e_m) \cdot \vec a = \hat e_j \left(\underbrace{\hat e_m \cdot \vec a}\right), \quad \text{und} \quad \vec a \cdot (\hat e_j \circ \hat e_m) = \left(\underbrace{\vec a \cdot \hat e_j}\right) \hat e_m \qquad (3)$$

$$\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix} \circ \underbrace{(\cdots) \cdot \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}_{a_m} = \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix} a_m \qquad \underbrace{(\cdots) \cdot \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}_{a_j} \circ (\cdots) = a_j (\cdots) \qquad (4)$$

Check (1)

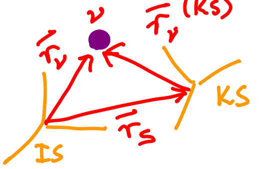
$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec\omega \cdot \left(\sum_{jm} I_{jm} \hat e_j \circ \hat e_m\right) \cdot \vec\omega = \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j I_{jm} \omega_m \checkmark \qquad (5)$$

$\omega_j$ $\omega_m$ $= (1)$ ✓

## Drehimpuls

(hängt vom Bezugspunkt ab)

**Satz:** Der Drehimpuls des starren Körpers bezüglich eines beliebigen Punkts kann zerlegt werden in den Drehimpuls des Schwerpunkts bzgl. dieses Punktes und den Relativdrehimpuls:



$$\boxed{\vec L_{tot} = M\,\vec r_S \times \dot{\vec r}_S + \underbrace{\sum_\nu m_\nu\, \vec r_\nu^{\,(KS)} \times \left(\frac{d\vec r_\nu^{\,(KS)}}{dt}\right)_{IS}}_{\vec L_{rel}}} \qquad (1)$$

Beweis:

für jeden Massenpunkt gilt: $\vec r_\nu = \vec r_S + \vec r_\nu^{\,(KS)}$ (2)

Gesamtdrehimpuls: $\vec L_{tot} = \sum_\nu m_\nu\, \vec r_\nu \times \dot{\vec r}_\nu \overset{(2)}{=} \sum_\nu m_\nu \left(\vec r_S + \vec r_\nu^{\,(KS)}\right) \times \left(\dot{\vec r}_S + \left(\frac{d\vec r_\nu^{\,(KS)}}{dt}\right)_{IS}\right)$

Zeitableitung bezieht sich auf ein Inertialsystem.

$$= \underbrace{\sum_\nu m_\nu}_{M} \left[\vec r_S \times \dot{\vec r}_S + \vec r_S \times \left(\frac{d\vec r_\nu^{\,(KS)}}{dt}\right)_{IS} + \vec r_\nu^{\,(KS)} \times \dot{\vec r}_S + \vec r_\nu^{\,(KS)} \times \left(\frac{d\vec r_\nu^{\,(KS)}}{dt}\right)_{IS}\right] \qquad (3a)$$

$$= M\,\vec r_S \times \dot{\vec r}_S + \vec r_S \times M \underset{\overset{\|}{0}}{\dot{\vec r}_S^{\,(KS)}} + \underset{\overset{\|}{0}}{M\,\vec r_S^{\,(KS)}} \times \dot{\vec r}_S + \vec L_{rel} \qquad (3b)$$

per Definition

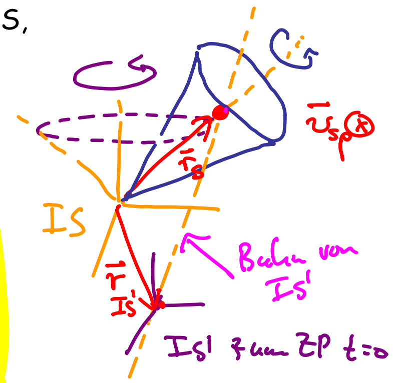
$$\left.\begin{aligned} &\sum_\nu m_\nu\, \vec r_\nu^{\,(KS)} = M\,\vec r_S^{\,(KS)} = 0 \\ &\sum_\nu m_\nu \left(\frac{d\vec r_\nu^{\,(KS)}}{dt}\right)_{IS} = M\,\dot{\vec r}_S^{\,(KS)} \end{aligned}\right\}$$

Schwerpunkt liegt in KS bei $\vec r_S^{\,(KS)} = 0$ (4)

das gilt für alle t $\Rightarrow$ $\dot{\vec r}_S^{\,(KS)} = 0$ (5)

---

Im Folgenden wählen wir ein Inertialsystem IS' in dem der Schwerpunkt momentan ruht (SP-System) (d.h. IS' bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit bzgl. IS,



so, dass zum momentanen Zeitpunkt t gilt:

$\vec r_{IS'} = \vec r_0 + \vec v_0\, t$ (1)

$\vec r_{IS'}(t) = \vec r_S(t)$ , $\vec v_0 = \dot{\vec r}_S(t)$ (2)

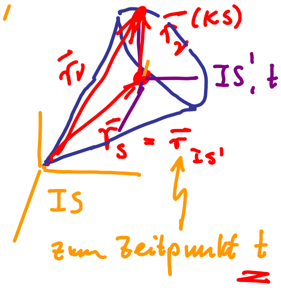
$\hat I = \hat \Theta$

Satz:
Im SP-System IS' gilt:

Trägheitstensor

$$\boxed{\begin{aligned} \vec L &= \hat I \cdot \vec\omega \\ L_i &= \sum_m I_{im}\, \omega_m \end{aligned}} \qquad (3)$$

Beweis:
zum momentanen Zeitpunkt t gilt, aus Sicht von IS':



$$\left(\vec L_{tot}\right)_{IS'} \overset{(27.1)}{=} M \underbrace{\left(\vec r_S\right)_{IS'}}_{=0} \times \left(\dot{\vec r}_S\right)_{IS'} + \sum_\nu m_\nu \underset{``A}{\vec r_\nu^{\,(KS)}} \times \underbrace{\left(\frac{d\vec r_\nu^{\,(KS)}}{dt}\right)_{IS'}}_{\left(\underset{``B}{\vec\omega} \times \underset{``C}{\vec r_\nu^{\,KS}}\right)} \qquad (4)$$

$\vec A \times (\vec B \times \vec C) =$
$\vec B(\vec A \cdot \vec C) - \vec C(\vec A \cdot \vec B)$

$$= \sum_\nu m_\nu \left[\vec\omega \left(\vec r_\nu^{\,(KS)}\right)^2 - \vec r_\nu^{\,(KS)} \left(\vec r_\nu^{\,(KS)} \cdot \vec\omega\right)\right] \qquad (5)$$

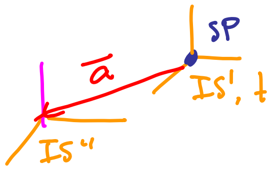
j. Komponente:
$\vec\omega = \sum_j \omega_j\, \hat e_j^{(KS)}$
$\vec r_\nu^{\,(KS)} = \sum_j r_{\nu,j}^{(KS)}\, \hat e_j^{(KS)}$

$$= \sum_{jm} \hat e_j^{(KS)} \underbrace{\sum_\nu m_\nu \left[\left(\vec r_\nu^{\,KS}\right)^2 \delta_{jm} - r_{\nu,j}^{(KS)}\, r_{\nu,m}^{(KS)}\right]}_{I_{jm}^{(KS)}} \omega_m = \hat I \cdot \vec\omega \qquad (6)$$

□

Analog für kontinuierliche Massenverteilung.

Bemerkung: die Herleitung verläuft analog für den Drehimpuls relativ zu einem anderen Inertialsystem, IS'', (um $\vec{a}$ verschoben relativ zum SP), in dem ein anderer körperfester Punkt (statt des SP) momentan ruht:



$$\left(\vec L_{tot}\right)_{IS'} \overset{(27.1)}{=} \sum_\nu m_\nu \vec r_\nu{}' \times \underbrace{\left(\frac{d\vec r_\nu{}'}{dt}\right)_{IS'}}_{= \vec\omega \times \vec r\,''}$$

$$\left(\vec L_{tot}\right)_{IS'} \overset{(28.6)}{=} \sum_{jm} \hat e_j \underbrace{\sum_\nu m_\nu \left[(\vec r_\nu{}')^2 \delta_{jm} - r'_{\nu,j}\, r'_{\nu,m}\right]}_{I'_{jm}} \omega_m$$

$I'_{jm}$ Trägheitstensor bezüglich IS''

Steinersche Satz:

$$= \sum_{jm} \hat e_j \left[ I''_{jm} + M(\vec a^2 \delta_{jm} - a_j a_m)\right] \omega_m$$

$$\left(\vec L_{tot}\right)_{IS'} = \left(\vec L_{tot}\right)_{IS''} + M \vec a \times (\vec\omega \times \vec a)$$

(wie erwartet!)

Drehimpuls vom SP relativ zu IS''

---

**Drehmoment** (Erinnerung):

$$\vec L = \sum_\nu m_\nu \vec r_\nu \times \dot{\vec r}_\nu$$

$$\left(\frac{d\vec L}{dt}\right)_{IS} = \sum_\nu m_\nu \Big( \underbrace{\dot{\vec r}_\nu \times \dot{\vec r}_\nu}_{=0} + \vec r_\nu \times \underbrace{\ddot{\vec r}_\nu}_{\vec F_\nu / m_\nu} \Big) \qquad (1)$$

$$= \sum_\nu \vec r_\nu \times \vec F_\nu = \vec M \qquad (2)$$

↑ Gesamtdrehmoment

Ziel: diese Gl. im körperfesten System KS ausdrücken:

$$\vec L(t) = \sum_j L_j^{(KS)}\, \hat e_j^{(KS)} \qquad (3)$$

↖ Körperfestes Bezugsystem

$$\left(\frac{d\vec L(t)}{dt}\right)_{IS} = \sum_j \Bigg[ \underbrace{\frac{dL_j^{(KS)}}{dt}}_{\dot L_j^{(KS)}} \hat e_j^{(KS)} + L_j^{(KS)} \underbrace{\frac{d\hat e_j^{(KS)}}{dt}}_{\vec\omega \times \hat e_j^{(KS)}} \Bigg] \qquad (4)$$

$$\vec L = L_i^{IS} e_i^{IS}$$

$$\left(\frac{d\vec L}{dt}\right)_{IS} = \dot L_i^{IS} e_i^{(IS)}$$

$$= \sum_j \dot L_j^{(KS)}\, \hat e_j^{(KS)} + \vec\omega \times \vec L \qquad (5)$$

(5) in (2) $\cdot\, \hat e_j^{(KS)}$

$$M_j^{(KS)} = \dot L_j^{(KS)} + (\vec\omega \times \vec L)_j^{(KS)} \qquad (6)$$

Im folgenden lassen wir immer (KS) konsistent weg, und schreiben

$$\vec{M}^{(KS)} := \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} , \quad \vec{L}^{(KS)} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} , \quad \vec{\omega}^{(KS)} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Im Hauptachsensystem gilt: $I$ diagonal!

$$\vec{L} \overset{(28.3)}{=} \hat{I} \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{L}_j^{(KS)} : \begin{pmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

da $I$ zeitunabhängig ist! Vorteil vom Körperfesten System!!

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz: im Schwerpunkts- und Hauptachsensystem wird Bewegung es starren Körpers durch die "Eulerschen Gleichungen" beschrieben

$$M_j^{(KS)} \overset{(30.6)}{=} \dot{L}_j^{(KS)} + (\vec{\omega} \times \vec{L})_j^{(KS)} \Rightarrow$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{L})_1 = \omega_2 L_3 - \omega_3 L_2$$

$$\overset{(2)}{=} \omega_2 I_3 \omega_3 - \omega_3 I_2 \omega_2$$

$$= \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 && (3a) \\ M_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 && (3b) \\ M_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 && (3c) \end{aligned}}$$

(mit Komponenten von $\omega_j$ und $M_j$ bezogen auf das körperfeste Hauptachsensystem):