

# Beispiel: Hantel mit 2 Massen

U20- 19.06.08

SK25

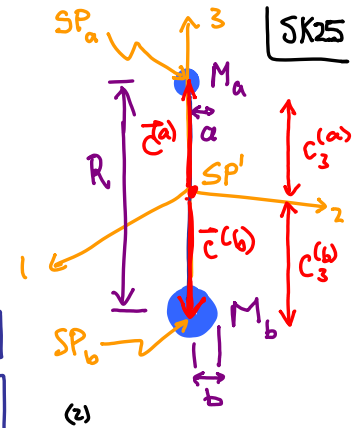
Trägheitsmomente  
für  $M_a, M_b$  bezüglich  
ihrer Mittelpunkte bei  
 $SP_a, SP_b$ :

$$\begin{aligned}\Theta_{11}^a &= \Theta_{22}^a = \Theta_{33}^a = \frac{2}{5} M_a a^2 \\ \Theta_{11}^b &= \Theta_{22}^b = \Theta_{33}^b = \frac{2}{5} M_b b^2\end{aligned}$$

(1)

Gesamt TM bezüglich  
gemeinsamen SP:

$$\Theta_{jm}^{(14.2)} = \Theta_{jm}^a + M_a \left[ (\vec{c}^{(a)})^2 \delta_{jm} - \vec{c}_j^{(a)} \vec{c}_m^{(a)} \right] + \Theta_{jm}^b + M_b \left[ (\vec{c}^{(b)})^2 \delta_{jm} - \vec{c}_j^{(b)} \vec{c}_m^{(b)} \right]$$



(2)

$$\text{Für } M_a: c_1^{(a)} = c_2^{(a)} = 0, \quad c_3^{(a)} = \frac{M_b R}{M_a + M_b}, \quad (3)$$

$$\text{Für } M_b: c_1^{(b)} = c_2^{(b)} = 0, \quad c_3^{(b)} = \frac{M_a R}{M_a + M_b}$$

Symmetrie um Hantelachse

$$\Theta_{11}^G = \Theta_{22}^G = \frac{2}{5} M_a a^2 + M_a \left[ \left( \frac{M_b R}{M_a + M_b} \right)^2 - 0 \right] + \frac{2}{5} M_b b^2 + \left[ M_b \left( \frac{M_a R}{M_a + M_b} \right)^2 - 0 \right] \quad (4)$$

$$\Theta_{33}^G = \frac{2}{5} M_a a^2 + 0 + \frac{2}{5} M_b b^2 + 0 \quad (5)$$

Weitere Schreibweise für Rotationsenergie:

SK26

$$\Theta_{jm} \equiv I_{jm}$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j I_{jm} \omega_m = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \hat{I} \cdot \vec{\omega} \quad (1)$$

Wobei

$$\hat{I} \equiv \sum_{jm} I_{jm} \hat{e}_j \circ \hat{e}_m \quad (2)$$

"Dyade"      "Dyadisches Produkt"

Def: Dyadisches Produkt, liefert bei Skalarmultiplikation mit einem Vektor  $\vec{a}$ :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\dots) \cdot \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \sum_j A_j B_j$$

$$(\hat{e}_j \circ \hat{e}_m) \cdot \vec{a} = \hat{e}_j (\hat{e}_m \cdot \vec{a}), \quad \text{und} \quad \vec{a} \cdot (\hat{e}_j \circ \hat{e}_m) = (\vec{a} \cdot \hat{e}_j) \hat{e}_m \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \circ (\dots) \cdot \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} a_m$$

$$(\dots) \cdot \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \circ (\dots) = a_j (\dots)$$

(4)

Check (1)

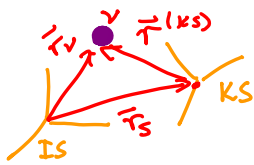
$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left( \sum_{jm} I_{jm} \hat{e}_j \circ \hat{e}_m \right) \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j I_{jm} \omega_m = (1)_L \quad (5)$$

## Drehimpuls

(hängt vom Bezugspunkt ab)

SK27

Satz: Der Drehimpuls des starren Körpers bezüglich eines beliebigen Punkts kann zerlegt werden in den Drehimpuls des Schwerpunkts bzgl. dieses Punktes und den Relativdrehimpuls:



$$\vec{L}_{\text{tot}} = M \vec{r}_s \times \dot{\vec{r}}_s + \underbrace{\sum_v m_v \vec{r}_v^{(ks)} \times \left( \frac{d\vec{r}_v^{(ks)}}{dt} \right)}_{\vec{L}_{\text{rel}}} \quad (1)$$

Beweis:

für jeden Massenpunkt gilt:  $\vec{r}_v = \vec{r}_s + \vec{r}_v^{(ks)}$  (2)

Gesamtdrehimpuls:

$$\left( \vec{L}_{\text{tot}} \right)_{IS} = \sum_v m_v \vec{r}_v \times \dot{\vec{r}}_v \stackrel{(2)}{=} \sum_v m_v (\vec{r}_s + \vec{r}_v^{(ks)}) \times \left( \dot{\vec{r}}_s + \left( \frac{d\vec{r}_v^{(ks)}}{dt} \right)_{IS} \right)$$

Zeitableitung bezieht sich auf ein Inertialsystem.

$$= \underbrace{\sum_v m_v}_{M} \left[ \vec{r}_s \times \dot{\vec{r}}_s + \vec{r}_s \times \left( \frac{d\vec{r}_v^{(ks)}}{dt} \right)_{IS} + \underbrace{\vec{r}_v^{(ks)} \times \dot{\vec{r}}_s}_{=0} + \vec{r}_v^{(ks)} \times \left( \frac{d\vec{r}_v^{(ks)}}{dt} \right)_{IS} \right]$$

per Definition

$$\sum_v m_v \vec{r}_v^{(ks)} = M \vec{r}_s^{(ks)} = 0$$

Schwerpunkt liegt in KS bei  $\vec{r}_s^{(ks)} = 0$  und ruht,  $\dot{\vec{r}}_s^{(ks)} = 0$  (4)

$$\sum_v m_v \frac{d\vec{r}_v^{(ks)}}{dt} = M \dot{\vec{r}}_s^{(ks)} = 0$$

$$= M \vec{r}_s \times \dot{\vec{r}}_s + \vec{L}_{\text{rel}} \quad (5)$$

Im Folgenden wählen wir ein Inertialsystem IS' in dem der Schwerpunkt momentan ruht (SP-System) (d.h. IS' bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit bzgl. IS, SK28)

so, dass zum momentanen Zeitpunkt t gilt:

$$\vec{r}_{IS'} = \vec{r}_0 + \vec{u}_0 t \quad (1)$$

$$\vec{r}_{IS'}(t) = \vec{r}_s(t), \quad \vec{u}_0 = \dot{\vec{r}}_s(t) \quad (2)$$

Satz:

Im SP-System IS' gilt:

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}$$

$$L_i = I_{im} \omega_m$$

Trägheitstensor

Beweis:

zum momentanen Zeitpunkt t gilt, aus Sicht von IS':

$$\left( \vec{L}_{\text{tot}} \right)_{IS'} \stackrel{(2.1)}{=} M \left( \vec{r}_s \times \dot{\vec{r}}_s \right)_{IS'} + \sum_v m_v \vec{r}_v^{(ks)} \times \left( \frac{d\vec{r}_v^{(ks)}}{dt} \right)_{IS'}$$

$\vec{L}_{IS'} = 0$   $\vec{L}_{IS'} = 0$

$$= \sum_v m_v \left[ \vec{\omega} \left( \vec{r}_v^{(ks)} \right)^2 - \vec{r}_v^{(ks)} \left( \vec{r}_v^{(ks)} \cdot \vec{\omega} \right) \right]$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

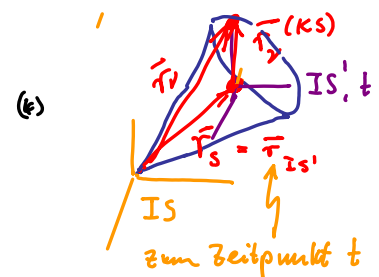
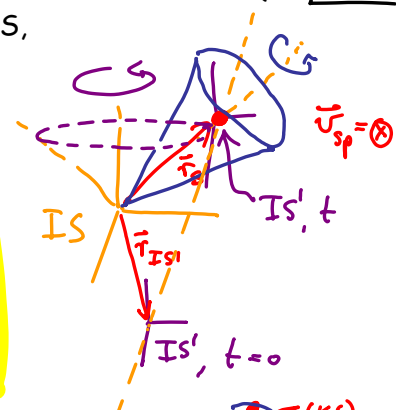
$$= \sum_v m_v \left[ \vec{\omega} \left( \vec{r}_v^{(ks)} \right)^2 - \vec{r}_v^{(ks)} \left( \vec{r}_v^{(ks)} \cdot \vec{\omega} \right) \right] \quad (5)$$

j-Komponente:

$$\vec{\omega} = \sum_j \omega_j \hat{e}_j^{(ks)} \quad \vec{r}_v^{(ks)} = \sum_j r_{v,j}^{(ks)} \hat{e}_j^{(ks)}$$

$$= \sum_m \hat{e}_m^{(ks)} \sum_v m_v \left[ \left( \vec{r}_v^{(ks)} \right)^2 \delta_{jm} - r_{v,j}^{(ks)} r_{v,m}^{(ks)} \right] \omega_m = \hat{I} \cdot \vec{\omega}$$

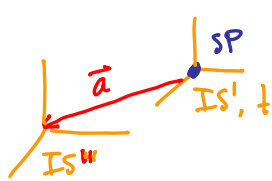
$I^{(ks)}$



Analog für kontinuierliche Massenverteilung.

KS29

Bemerkung: die Herleitung verläuft analog für den Drehimpuls relativ zu einem anderen Inertialsystem,  $IS''$ , (um  $\vec{a}$  verschoben relativ zum SP), in dem ein anderer körperfester Punkt (statt des SP) momentan ruht:



$$(\vec{L}_{tot})_{IS''} \stackrel{(27.1)}{=} \sum_v m_v \vec{r}_v'' \times \underbrace{\left( \frac{d\vec{r}_v''}{dt} \right)}_{= \vec{\omega} \times \vec{r}_v''}_{IS''}$$

$$(\vec{L}_{tot})_{IS''} \stackrel{(28.6)}{=} \sum_{jm} \hat{e}_j \underbrace{\sum_v m_v [(\vec{r}_v'')^2 \delta_{jm} - r_{v,j}'' r_{v,m}'']}_{I_{jm}''} \omega_m$$

$I_{jm}''$  Trägheitstensor bezüglich  $IS''$

Steinersche Satz:

$$= \sum_{jm} \hat{e}_j \left[ \underbrace{I_{jm}'}_{\downarrow (28.6)} + M(\vec{a}^2 \delta_{jm} - a_j a_m) \right] \omega_m$$

$$(\vec{L}_{tot})_{IS''} = (\vec{L}_{tot})_{IS'} + M \vec{a} \times (\vec{\omega} \times \vec{a})$$

(wie erwartet!)

Drehimpuls vom SP relativ zu  $IS''$

Drehmoment (Erinnerung):

$$\left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{IS} = \sum_v m_v \left( \underbrace{\dot{\vec{r}}_v \times \dot{\vec{r}}_v}_{=0} + \vec{r}_v \times \underbrace{\ddot{\vec{r}}_v}_{\vec{F}_v/m_v} \right) \quad (1)$$

$$= \sum_v \vec{r}_v \times \vec{F}_v = \vec{M} \quad (2)$$

$\uparrow$  Gesamt drehmoment

Ziel: diese Gl. im körperfesten System KS ausdrücken:

$$\vec{L}(t) = \sum_j L_j^{(KS)} \hat{e}_j^{(KS)} \quad (3)$$

$\hat{e}_j^{(KS)}$  Körperfestes Bezugssystem

$$\left( \frac{d\vec{L}(t)}{dt} \right)_{IS} = \sum_j \underbrace{\frac{dL_j^{(KS)}}{dt}}_{\dot{L}_j^{(KS)}} \hat{e}_j^{(KS)} + L_j^{(KS)} \underbrace{\frac{d\hat{e}_j^{(KS)}}{dt}}_{\vec{\omega} \times \hat{e}_j^{(KS)}} \quad (4)$$

$$= \sum_j \dot{L}_j^{(KS)} \hat{e}_j^{(KS)} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (5)$$

$$(5) \text{ in } (2) : \hat{e}_j^{(KS)}$$

$$M_j^{(KS)} = \dot{L}_j^{(KS)} + (\vec{\omega} \times \vec{L})_j^{(KS)} \quad (6)$$

Im folgenden lassen wir immer (KS) konsistent weg, und schreiben [KS]

Komponenten bezogen  
auf KS, d.h.

$$\vec{M}^{(KS)} := \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{L}^{(KS)} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}^{(KS)} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{M} = \sum_j M_j \hat{e}_j^{(KS)}, \text{ usw.}$$

Im Hauptachsensystem gilt:  $\hat{I}$  diagonal!

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{L}_j^{(KS)}: \begin{pmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

da  $I$  zeitunabhängig ist! Vorteil  
vom Körperfesten System !!

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz: im Schwerpunkts- und Hauptachsensystem wird Bewegung des starren Körpers durch die "Eulerschen Gleichungen" beschrieben

$$\stackrel{(20.6)}{M_j^{(KS)}} = \dot{L}_j^{(KS)} + (\vec{\omega} \times \vec{L})_j^{(KS)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{L})_1 &= \omega_2 L_3 - \omega_3 L_2 \\ &= \omega_2 I_3 \omega_3 - \omega_3 I_2 \omega_2 \\ &= \omega_2 \omega_3 \end{aligned}$$

$$M_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \quad (3a)$$

$$M_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \quad (3b)$$

$$M_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \quad (3c)$$

(mit Komponenten von  $\omega_j$  und  $M_j$  bezogen auf das körperfeste Hauptachsensystem):