

Satz: im Schwerpunkts- und Hauptachsensystem wird Bewegung es starren Körpers durch die "Eulerschen Gleichungen" beschrieben

$$M_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \quad (1a)$$

$$M_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \quad (1b)$$

$$M_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \quad (1c)$$

Komponenten von ω_j und M_j sind bezogen auf das körperfeste Hauptachsensystem. Vor allem für das Drehmoment kann das unhandlich sein. Wir betrachten deshalb zunächst den freien Kreisel, d.h. $M_j = 0$ (2)

Satz: (1) Für einen unsymmetrischen freien Kreisel ist eine konstante Winkelgeschwindigkeit nur bei Drehung um eine der Hauptträgheitsachsen möglich. (2) Dabei ist nur die Drehung um das größte oder kleinste Hauptträgheitsmoment stabil.

Beweis von (1): Annahme: sei $\vec{\omega} = \text{konst.}$, $\Rightarrow \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$ (3)

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Aber: Für unsymmetrischen Kreisel gilt für alle Differenzen:

$$I_m \neq I_j \quad \forall m \neq j \quad (1) \quad \text{KS33}$$

\Rightarrow Zwei der ω_j müssen = 0 sein (2)

\Rightarrow Dittk $\omega_j \neq 0$ Drehung findet um diese Hauptachse statt! (3)
□

Beweis von (2): ω_1 sei fest vorgegeben, und betrachte eine kleine Störung in 2,3-Richtung: ("Stabilitätsanalyse")

$$\begin{cases} \omega_1 = \text{gegeben} \\ \omega_2 = \varepsilon_2(t) \ll \omega_1 \\ \omega_3 = \varepsilon_3(t) \ll \omega_1 \end{cases} \quad \text{kleine Störung} \quad (4)$$

Wir betrachten in den Eulerschen Gleichungen (32.1) die Terme linear in ε

$$0 = I_1 \dot{\omega}_1 + \left[(I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \right] \approx 0 \Rightarrow \omega_1 = \text{konst.} \quad (5)$$

$$0 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \quad (6)$$

$$0 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \quad (7)$$

} 2 gekoppelte Gl. für $\varepsilon_2, \varepsilon_3$

$\frac{d}{dt}$ (33.6)

$$0 = I_2 \ddot{\varepsilon}_2 + (I_1 - I_2) \omega_1 \dot{\varepsilon}_3 \quad (33.7) \quad \hookrightarrow \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_1 \varepsilon_2 \quad (1)$$

$$(1) : \quad 0 = \ddot{\varepsilon}_2 + \alpha \varepsilon_2 \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2) \omega_1^2}{I_2 I_3} \quad (2)$$

Analog: $0 = \ddot{\varepsilon}_3 + \alpha \varepsilon_3 \quad (3)$

Fallunterscheidung:

(a) I_1 ist größtes oder kleinstes Moment: $\alpha > 0$; (2) = harm. Osz., mit $\Omega = \sqrt{\alpha}$

$\varepsilon_2(t)$ bleibt klein

$\Rightarrow \omega_1(t) \approx \text{const.}$ ist stabil

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_2(0) \cos(\sqrt{\alpha} t) + \gamma_2 \sin(\sqrt{\alpha} t) \quad (4)$$

\uparrow konst. durch $\dot{\varepsilon}_2(0)$ bestimmt

(a) I_2 ist das mittlere Moment: $\alpha < 0 \Rightarrow$ exp. Verhalten

$\varepsilon_2(t)$ wächst

Exponentiell (außer wenn $\varepsilon_2(0) = -\gamma_2$) $\Rightarrow \omega_1(t) \approx \text{const}$ ist instabil!

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_2(0) [e^{\sqrt{|\alpha|} t} + e^{-\sqrt{|\alpha|} t}] + \gamma_2 [e^{\sqrt{|\alpha|} t} - e^{-\sqrt{|\alpha|} t}] \quad (5)$$

K535

Beispiel für unsymmetrischen Kreisel:

Saturn-Mond Hyperion, mit Halbachsen von etwa 190 km, 145 km, 114 km, ist sehr unsymmetrisch.

Folglich erzeugen die Euler-Gleichungen sehr komplizierte (chaotische) Dynamik:

Konkret: eine (hypothetische Messung der momentanen räumlichen Orientierung auf 10 Stellen genau

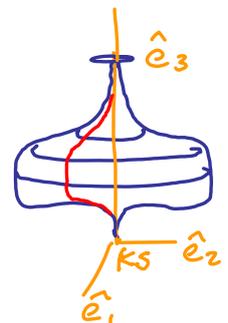
durch Voyager I im November 1980 wäre nicht ausreichend gewesen, um die Groborientierung der Achse beim Vorbeiflug von Voyager II im August 1981 vorherzusagen...

Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Grundannahmen:

$$\vec{M} = 0, \quad I_1 = I_2 \equiv I \quad (1)$$

Symmetrieachse = "Figurenachse" $\equiv \hat{e}_3$



Euler-Gleichungen:

$$0 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \quad (2)$$

(32.1):

$$0 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \quad (3)$$

$$0 = I_3 \dot{\omega}_3 + \cancel{(I_2 - I_1)} \omega_1 \omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \text{const.} \quad (4)$$

$$\dot{\omega}_1 \stackrel{(35.2)}{=} \Omega \omega_2 \quad \text{mit} \quad \Omega = \omega_3 \left(1 - \frac{I_3}{I}\right) \quad (1) \quad \boxed{\text{KS36}}$$

$$\dot{\omega}_2 = -\Omega \omega_1 \quad (2)$$

$$(1), (2): \quad \dot{\omega}_1 = \Omega \dot{\omega}_2 = -\Omega^2 \omega_1 \Rightarrow \text{harm. Oszillator!} \quad (3)$$

Lösung:

$$\omega_2 \stackrel{(1)}{=} \frac{\dot{\omega}_1}{\Omega}$$

$$\omega_1(t) = \bar{\omega} \sin(\Omega t + \psi_0) \quad (4)$$

$$\omega_2(t) = \bar{\omega} \cos(\Omega t + \psi_0) \quad (5)$$

Momentane Drehachse $\bar{\omega}$ präzediert im KS um Figurenachse \hat{e}_3

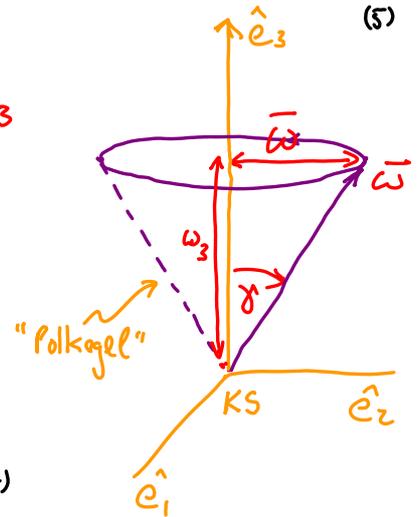
$\bar{\omega}$ bewegt sich im KS auf dem "Polkegel",

mit Öffnungswinkel:
$$\gamma = \arctan \frac{\bar{\omega}}{\omega_3} \quad (6)$$

Betrag der Winkelgeschw. ist konstant:

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$$

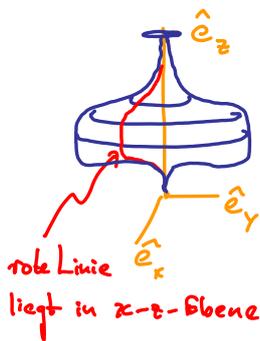
$$\stackrel{(4,5)}{(35.4)} \bar{\omega}^2 + \omega_3^2 = \text{const.} \quad (7)$$



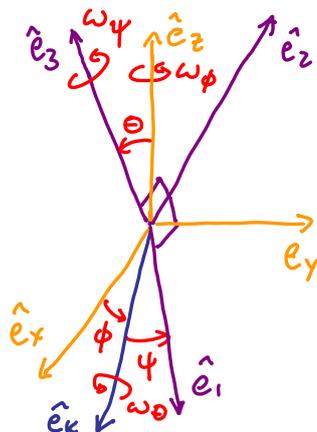
Aber wie sieht diese Bewegung im Inertialsystem IS aus? (raumfest)

KS37

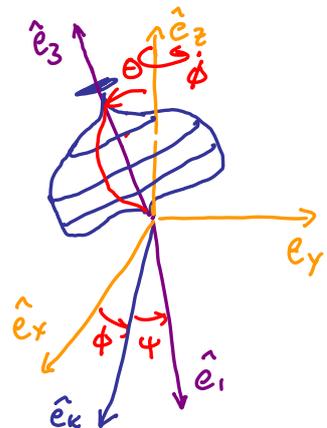
Ausgangsstellung:



Skizze von Seite K7



Endstellung:



Interpretation der Euler-Winkel für Kreisel:

θ Winkel zwischen Figurenachse \hat{e}_3 und \hat{z} -Achse (1)

$\dot{\phi}$ Drehung der Figurenachse um \hat{z} -Achse (2)

$\dot{\psi}$ (3)

Figurenachse \hat{e}_3

Wähle Drehimpulsvektor in z-Richtung: $\vec{L} = L \hat{e}_z = \text{const.}$ (weil $\vec{M} = 0$)

Komponenten von \vec{L} in KS: $L_1 = L \hat{e}_z \cdot \hat{e}_1 = L \sin \theta \sin \psi \stackrel{(31.2)}{=} I \omega_1 \stackrel{(36.4)}{=} I \bar{\omega} \sin(\Omega t + \psi_0)$ (1)

$L_2 = L \hat{e}_z \cdot \hat{e}_2 = L \sin \theta \cos \psi \stackrel{(31.2)}{=} I \omega_2 \stackrel{(36.5)}{=} I \bar{\omega} \cos(\Omega t + \psi_0)$ (2)

$L_3 = L \hat{e}_z \cdot \hat{e}_3 \stackrel{(7.1A)}{=} L \cos \theta \stackrel{(25.4)}{=} I_3 \omega_3 = \text{const.}$ (3)

$\hat{e}_z \cdot \hat{e}_1 \stackrel{(8.6a)}{=} \sin \theta \sin \psi$
 $\hat{e}_z \cdot \hat{e}_2 \stackrel{(8.6b)}{=} \sin \theta \cos \psi$
 $\hat{e}_z \cdot \hat{e}_3 \stackrel{(8.6c)}{=} \cos \theta$

Aus (3) folgt

Aus (1) und (2) folgt:

$\theta \stackrel{(3)}{=} \text{const.} \stackrel{(4)/(5)}{=} \arctan \frac{I \bar{\omega}}{I_3 \omega_3}$ (1): $L \sin \theta = I \bar{\omega}$ (4)
 $\psi = \Omega t + \psi_0$ (3): $L \cos \theta = I_3 \omega_3$ (5)

Bestimme nun ϕ :

$\vec{\omega} \stackrel{(8.1)}{=} \dot{\phi} \hat{e}_z + \dot{\psi} \hat{e}_1 + \dot{\psi} \hat{e}_2 \Rightarrow \vec{\omega}$ in der $\hat{e}_1 - \hat{e}_2$ -Ebene (6)

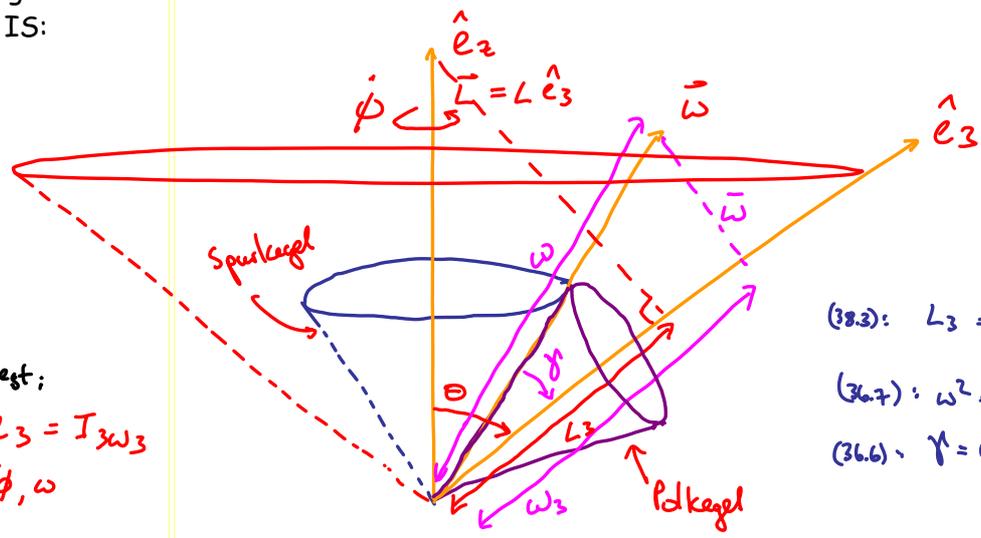
Komponenten von $\vec{\omega}$ in KS: $\omega_1 = \hat{e}_1 \cdot \vec{\omega} \stackrel{(8.4)}{=} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \stackrel{(36.4)}{=} \bar{\omega} \sin(\Omega t + \psi_0)$ (7)

$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \stackrel{(1)}{=} \sin \theta \cos \psi$

Präzession mit $\dot{\phi}$:

$\dot{\phi} \stackrel{(7)}{=} \frac{\bar{\omega}}{\sin \theta}$ $\phi = \frac{\bar{\omega}}{\sin \theta} t + \phi_0$ (8)

Visualisierung im raumfesten IS:



Wir legen fest:

- $\omega_3 \Rightarrow L_3 = I_3 \omega_3$
- $\bar{\omega} \Rightarrow \dot{\phi}, \omega$

(38.2): $L_3 = I_3 \omega_3 = \text{const.}$

(36.7): $\omega^2 = \bar{\omega}^2 + \omega_3^2$

(36.6): $\psi = \arctan \bar{\omega} / \omega_3$

Ergebnisse für Euler-Winkel für freien, symmetrischen Kreisel:

1. Winkel zwischen Figurenachse \hat{e}_3 und \hat{z} -Achse: $\theta = \arctan \frac{\bar{\omega} I}{\omega_3 I_3}$ (1)

2. Drehung der Figurenachse um \hat{z} -Achse: $\dot{\phi} = \frac{\bar{\omega}}{\sin \theta}$ (2)

3. Drehung des Körpers (also von KS) um Figurenachse \hat{e}_3 : $\dot{\psi} = \Omega = \omega_3 \left(1 - \frac{I_3}{I}\right)$ (3)

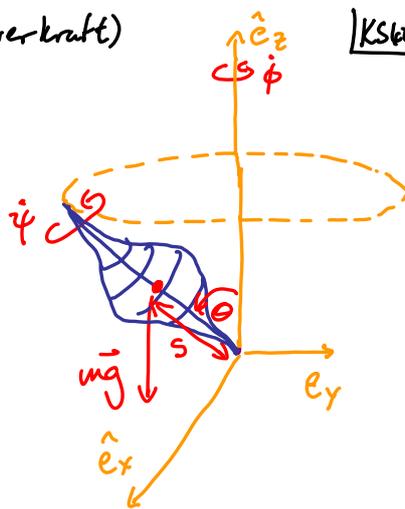
Schwerer symmetrischer Kreisel

($\vec{M} \neq 0$ wegen Schwerkraft)

KS60

Wähle Unterstützungspunkt auf Figurenachse.

Da Drehmoment in Euler-Gleichung auf KS bezogen wurden muss, ist es einfacher, direkt bei Lagrange-Gl. 2. zu beginnen (statt von Euler-Gl.)



Potentielle Energie:

$$V = Mg s \cos \theta \quad (1)$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,m} \omega_j I_{jm} \omega_m \quad (2)$$

im Hauptachsensystem:
($I_x = I_y$)

$$= \frac{1}{2} I (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \quad (3)$$

ω_j in KS, ausge-
drückt durch
Euler-Winkel:

$$(8.4) \left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

I_{jm} sei Trägheitstensor
bezüglich Unterstützungspunkt
(nicht SP)

(8.4) in (8.3):

$$T = \frac{1}{2} I (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \quad (KS61) \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} & \dot{\phi} & \dot{\psi} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$L = T - U = L(\theta, \psi, \phi; \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}) \quad (2)$$

Zyklische Variablen: ϕ, ψ

→ Erhaltungsgrößen

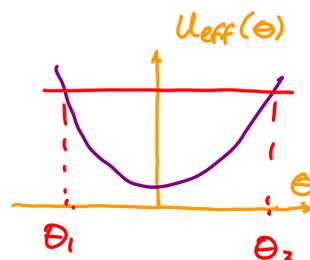
$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}, \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \quad (3)$$

Energie-Erhaltung
(weil $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$):

$$\text{const.} = E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L \quad (4)$$

Eliminiere $\dot{\phi}$ und $\dot{\psi}$ mittels (3), dann liefert $E = \text{const.}$ eine effektive 1-dimensionale Bewegungsgl. für $\theta(t)$ im effektiven Potential!

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(L_2 - L_3 \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + mgs \cos \theta - \frac{L_3^2}{2I_3} \quad (5)$$



⇒ Periodische Oszillationen von $\theta(t)$! "Nutation"
"Reguläre" Präzession: falls $\theta = \theta_0 = \text{const.}$

