

Hamilton-Funktion und Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Motivation: Die Hamiltonsche Formulierung der klassischen Mechanik

- erweitert Klasse der zulässigen koordinaten Transf. (wichtig für Diskussion v. Symmetrien)
- ist ideal für formale Diskussion der mathematischen Struktur der klassischen Mechanik.
- verdeutlicht den Bezug der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik.

Zentrale Ergebnisse (Vorschau):

Def: "Hamilton-Funktion":

$$H(q, p, t) :=$$

$(q_1, \dots, q_f)$   
 $(p_1, \dots, p_f)$

wobei  $p_k =$   
und  $\dot{q}_k =$  (1)

Hamiltonschen Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q} = \quad , \quad \dot{p} = \quad \quad (2)$$

Def: "Poisson-Klammer":

$$F = F(q, p, t), \quad G = G(q, p, t) \quad \{ , \} = \sum_k \left[ \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \right] \quad (3)$$

Bewegungsgl. ausgedrückt durch Poisson-Klammern:

$$\frac{dF}{dt} = \quad \quad (4)$$

Einfachstes Beispiel: freies Teilchen in konservativem Kraftfeld

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q, t) \quad (1)$$

Kanonischer Impuls:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \quad , \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \dot{q}(q, p) = \quad (2)$$

Hamilton-Funktion:

$$H(p, q) \stackrel{(1)}{=} p \dot{q} - L = \quad (3)$$

$$= \quad (4)$$

Hamilton-Gl:

$$\dot{q} \stackrel{(1,2)}{=} \frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad \dot{p} \stackrel{(1,2)}{=} - \frac{\partial H}{\partial q} \quad (5)$$

Poisson-Klammer für  $F = q, G = p$ :

$$\{ , \} \stackrel{(1,3)}{=} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} \quad (6)$$

Inschrift auf Grabstein von Max Born

Zeitentwicklung von  $q$  via Poisson-Klammern:

$$\frac{d}{dt} \stackrel{(1,4)}{=} \{ , H \} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} = \quad (7)$$

### Allgemeine Formulierung

H3

Verallg. Koordinaten seien:  $q = (q_1, \dots, q_f)$ ,  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$  (1)

Kanonischen Impulse:  $p = (p_1, \dots, p_f)$ , mit  $p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}$  (2)

Ziel: ein Formalismus, dessen Variablen nicht  $q$  sondern  $p$  sind!

Def: Hamilton-Funktion (engl: Hamiltonian):  
Ein System, das durch eine Langrange-Funktion mit (3)

beschrieben wird, heisst "kanonisch". Ein kanonisches System hat eine sog. Hamiltonfunktion.

$$H(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f, t) :=$$
 (4)

Vektoren, wie in (1)

Die unabhängigen Variablen der Hamilton-Funktion sind:

- die generalisierten Koordinaten (5)

- die generalisierten Impulse ("kanonisch konjugierten Impulse") (6)

- "p und q sind unabhängige Variablen" bedeutet:

Bemerkung: (3.4) ist eine Legendre-Transformation von L zu H, wodurch die durch  $\dot{q}$  als unabhängige Variable ersetzt wird. Wozu die Einschränkung (3.3)?

H4

Um  $H = (1)$  zu konstruieren muss sich  $\dot{q}$  eindeutig als  $p$  ausdrücken lassen. (1)

Anders gesagt,  $p = p(q, \dot{q}, t)$  muss sich nach den  $\dot{q}_i$  auflösen lassen. (2)

Nach dem Satz über invertierbare Funktionen ist dies genau dann möglich, wenn die Matrix

$$M_{kj} = \frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j} \text{ invertierbar ist, d.h.} \quad (3)$$

invertierbar ist, das System also kanonisch ist. Plausibilitätsarg. für diesen Satz:

Betrachte die Funktionen  $p_k = f_k(q, \dot{q}, t)$ ,  $k = 1, \dots, f$  (4)

Taylor-Entw. nach 2.tem Argument:  $p_k = f_k(q, 0, t) + \sum_j \left( \frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \dots$  (5)

Betrachte Limes  $\dot{q}_k \rightarrow 0$ :  $\Rightarrow \sum_j \left( \frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \approx p_k - f_k(q, 0, t)$  (6)

(5) ist nur nach  $\dot{q}_k \rightarrow 0$  lösbar, falls  $M_{kj}$  invertierbar ist, d.h. falls (3) gilt. (7)

Wenn kinetische Energie quadratisch ist in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten und das Potenzial geschwindigkeitsunabhängig, ist das System immer kanonisch:

HS

Sei  $T = \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i T_{ij} \dot{q}_j$ , mit  $T_{ij} = \text{symmetrisch, positiv definit}$  (alle Eigenwerte sind  $> 0$ ) (1)

$\Rightarrow M_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} =$ , mit (2)

Beispiel: Kugelkoordinaten:  
(siehe Blatt 6, Hausaufg.)

$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$  (3)

$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \Rightarrow \dot{r} = p_r / m$  (4)

$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2}$  (5)

$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2 \sin^2 \theta}$  (6)

$M = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

= invertierbar!

$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - T =$  (7)

$=$  (8)

Eselsbrücke um sich zu merken: H hängt nicht von  $\dot{q}_j$

$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q, \dot{q}, t)$

HS6

(1)

$\left. \frac{\partial H(p, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_k} \right|_{p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}} =$

(2)

Beispiel: freies Teilchen:

$H =$   
 $\frac{\partial H}{\partial \dot{r}} =$

Satz: für ein kanonisches System sind die Lagrange-Gleichungen (2. Art) äquivalent zu den "Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (HG)" ("kanonische Bewegungsgleichungen"):

$\forall k = 1, \dots, f: \quad \dot{q}_k = \quad (3a) \quad \dot{p}_k = \quad (3b) \quad (HG)$

Bemerkung: aus  $f$  Differentialgleichungen 2. Ordnung (L2) werden äquivalent  $2f$  Diff.Gl. 1. Ordnung (HG). Folglich hat Hamilton-Formalismus mehr unabhängige Variablen ( $2f$  statt  $f$ ), und erlaubt somit eine größere Klasse von Transformationen.

Beweis, Teil 1:  
(L2)  $\Rightarrow$  (H9)

Betrachte:

$$H \stackrel{(1)}{=} \left[ \sum_j p_j \dot{q}_j(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \right] \quad \boxed{H7} \quad (1)$$

(H3.5):  $\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial p_k} =$$

Betrachte ferner:

$$H \stackrel{(6.1)}{=} \left[ \sum_j p_j \dot{q}_j(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \right]$$

(H3.6):  $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} =$$

(2)

$$=$$

(4)

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} =$$

Teil 1:  $\square$

(5)

Beweis, Teil 2: Gegeben  $H(q, p, t)$ , drücke Impulse als  
(H10)  $\Rightarrow$  (L2)

mittels (H9)

aus, und def. Lagrange-

$\boxed{H8}$

$$L = \sum_j p_j \dot{q}_j - H(q, p, t) \quad (1)$$

Betrachte:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j + p_k - \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_k} \quad (2)$$

$$= \text{reproduziert Def. v. kanonischem Impuls}$$

Betrachte:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_j \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \dot{q}_j - \left[ \frac{\partial H}{\partial q_k} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right] \quad (3)$$

$$=$$

reproduziert (L2)

(4)

Satz: Für System mit skleronomen (zeitunabhängigen) Zwangsbedingungen und Geschwindigkeitsunabhängigem Potential ist die Hamilton-Funktion gerade die Gesamtenergie des Systems, ausgedrückt durch die verallgemeinerten Koordinaten und Impulse.

(Bemerkung: in diesem Fall hat H eine klare physikalische Bedeutung! Vorteil gegenüber Lagrange...)

Beweis: Für skleronome Zwangsbedingungen ist kinetische Energie eine quadratische Form in den  $\dot{q}_j$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} T_{ij} \dot{q}_j, \quad V = V(q, t) \quad (1)$$

Kanonische Impulse:  $H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L \quad (2)$

Bemerkung: Sind die Potentiale zeitunabhängig, ist die Hamilton-Funktion eine Erhaltungsgröße (3)   
 Laut Annahme

$$\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial t} = \quad (4)$$

$$(H\dot{q}) = \sum_j [ \quad ] \quad (5) \quad \square$$

Satz: Falls die Hamilton-Funktion nicht von einer bestimmten generalisierten Koordinate abhängt (zyklische Koordinate), ist der dazugehörige kanonisch konjugierte Impuls eine Erhaltungsgröße.

(Annahme:  $q_k$  ist zyklisch)

Beweis: Aus  $0 = \frac{\partial H}{\partial q_k}$  folgt  $(i) \quad \square$

Mathematische Ergänzung: "Legendre-Transformation"

Betrachte Funktion:  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2)$

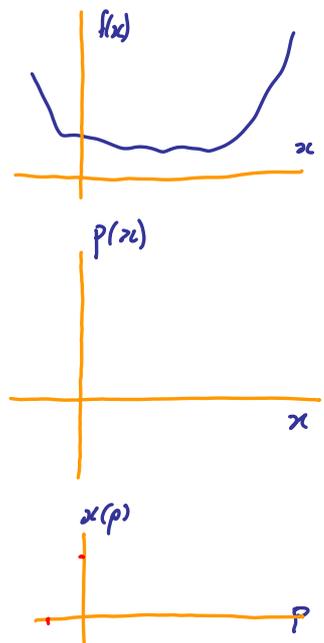
mit  $(3)$

Definiere die Funktion:  $p(x) := \quad ; \quad (4)$

Deren Umkehrfunktion sei  $(diese existiert wegen \quad) \quad ; \quad (5)$

Dann ist die Legendre-Transformierte von  $f(x)$

die Funktion  $\tilde{f}(p) := p x(p) - f(x(p)) \quad (6)$



Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} x^\alpha, \quad \forall x > 0, \alpha \neq 2.$$

HS 11

$$p(x) = f'(x) =$$

$$x(p) =$$

$$\tilde{f}(p) =$$

Bemerkung: Die Legendre-Trf. hat interessante mathematische Eigenschaften. Y.B. führt sie zweifach ausgeführt zur Identität. Im Beispiel oben:

$$\tilde{f}(y) = \quad , \text{ mit } y =$$
  
$$=$$

Bei der Legendre-Trf. geht also keine Information verloren, nur Wechsel der unabhängigen Variablen.

Verallgemeinerung der Legendre-Transformation auf Funktionen mehrerer Variablen:

HS 12

Betrachte:  $f(x_1, \dots, x_f)$  mit  $\det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \neq 0$

(1)

( $x_k$  steht für  $\dot{q}_k$  oben)

Definiere:

$p_k :=$  und Umkehrfunktionen seien

(2)

(3)

Legendre-Transf.:

$$\tilde{f}(p_1, \dots, p_f) :=$$

Bemerkung:

Damit ist die Hamilton-Funktion die Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion bezüglich der generalisierten Geschwindigkeiten. (Die generalisierten Koordinaten werden nicht transformiert!)