## Hamiltonsche Mechanik (Kanonische Mechanik)

V22 26.6.08 H1

### Hamilton-Funktion und Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Motivation: Die Hamiltonsche Formulierung der klassischen Mechanik
- erweiterert Klasse der zulässigen koordinaten Transf. (wichtig für Diskussion v. Symmetrien)
- ist ideal für formale Diskussion der mathematischen Struktur der klassischen Mechanik.
- verdeutlicht den Bezug der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik.

Zentrale Ergebnisse (Vorschau):

Def: "Hamilton-Funktion":
$$H(\underbrace{q}_{(q_1,\dots,q_f)},\underbrace{p}_{(p_1,\dots,p_f)},t) := \sum_k p_k \dot q_k - L(q,\dot q,t) \qquad \text{wobei } p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \text{ und } \dot q_k = \dot q_k(q,p) \tag{1}$$

Hamiltonschen Bewegungsgleichungen:
$$\dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{2}$$

Def: "Poisson-Klammer": $F = F(q,p,t)$, $G = G(q,p,t)$
$$\{F,G\} = \sum_{k=1}^{f}\left[\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k}\right] \quad \left[\xrightarrow{QM} \frac{1}{i\hbar}[\hat F,\hat G] := \frac{1}{i\hbar}\left(\hat F\hat G - \hat G\hat F\right)\right] \tag{3}$$
"Kommutator"

Bewegungsgl. ausgedrückt durch Poisson-Klammern:
$$\frac{dF}{dt} = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad \left[\xrightarrow{QM} \frac{d\hat F}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat F,\hat H] + \frac{\partial \hat F}{\partial t}\right] \tag{4}$$

---

### Einfachstes Beispiel: freies Teilchen in konservativem Kraftfeld

H2

Lagrange-Funktion:
$$L = \tfrac{1}{2}m\dot q^2 - V(q,t) \tag{1}$$

Kanonischer Impuls:
$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = m\dot q, \quad \Rightarrow \quad \dot q = \dot q(q,p) = p/m \tag{2}$$

Hamilton-Funktion:
$$H(p,q) \overset{(1.1)}{=} p\dot q - L = p(p/m) - \left[\tfrac{1}{2}m(p/m)^2 - V\right] \tag{3}$$
$$= \frac{p^2}{2m} + V(q,t) = \text{Energie} \tag{4}$$

Hamilton-Gl:
$$\dot q \overset{(1.2)}{=} \frac{\partial H}{\partial p} = p/m \overset{\checkmark}{=} (2) \; ; \quad \dot p \overset{(1.2)}{=} -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} \overset{\checkmark}{=} (N2) \tag{5}$$

Poisson-Klammer für $F = q$, $G = p$:
$$\{q,p\} \overset{(1.3)}{=} \frac{\partial q}{\partial q}\frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial q} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1 \tag{6}$$
$$\left[(1.3) \xrightarrow{QM} \underline{\cancel{\tfrac{1}{i\hbar}}[\hat q,\hat p] = i\hbar}\right] \text{Vorschau}$$

Inschrift auf Grabstein von Max Born

Zeitentwicklung von $q$ via Poisson-Klammern:
$$\frac{dq}{dt} \overset{(1.4)}{=} \{q,H\} + \underbrace{\frac{\partial q}{\partial t}}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial q}{\partial q}}_{1}\underbrace{\frac{\partial H}{\partial p}}_{p/m} - \underbrace{\frac{\partial q}{\partial p}}_{0}\frac{\partial H}{\partial q} = p/m \tag{7}$$

## Allgemeine Formulierung

**H3**

Verallg. Koordinaten seien: $q = (q_1, \dots, q_f)\,, \quad \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ (1)

Kanonischen Impulse: $p = (p_1, \dots, p_f)\,, \quad \text{mit} \quad p_i = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}$ (2)

Ziel: ein Formalismus, dessen Variablen nicht $(q, \dot{q})$ sondern $(q, p)$ sind!

Def: Hamilton-Funktion (engl: Hamiltonian):
Ein System, das durch eine Langrange-Funktion mit $\det\left(\overbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}}^{M_{ij}}\right) = \det M_{ij} \neq 0$ (3)

beschrieben wird, heisst "kanonisch". Ein kanonisches System hat eine sog. Hamiltonfunktion.

$$\boxed{H(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f, t) := \sum_k p_k \dot{q}_k(q,p,t) - L(q, \dot{q}(q,p,t), t)} \qquad (4)$$

Vektoren, wie in (1)

Die unabhängigen Variablen der Hamilton-Funktion sind:
- die generalisierten Koordinaten $q_i$
- die generalisierten Impulse ("kanonisch konjugierten Impulse") $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ (5)

- "p und q sind unabhängige Variablen" bedeutet: $\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0\,, \quad \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0$ (6)

**H4**

Bemerkung: (3.4) ist eine Legendre-Transformation von L zu H, wodurch die $\dot{q}$ durch $p$ als unabhängige Variable ersetzt wird. Wozu die Einschränkung (3.3)?

Um H = (4) zu konstruieren muss sich $\dot{q}_k$ eindeutig als $\dot{q}_k = \dot{q}_k(q,p,t)$ ausdrücken lassen. (1)

Anders gesagt, $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k(q,\dot{q},t)$ muss sich nach den $\dot{q}_k$ auflösen lassen. (2)

Nach dem Satz über invertierbare Funktionen ist dies genau dann möglich, wenn die Matrix

$$M_{kj} = \frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{invertierbar ist, d.h.} \quad \det(M_{kj}) \neq 0 \qquad (3)$$

invertierbar ist, das System also kanonisch ist. Plausibilitätsarg. für diesen Satz:

Betrachte die Funktionen $p_k = f_k(q, \dot{q}, t)\,, \quad k = 1, \dots, f$ (4)

Taylor-Entw. nach 2.tem Argument:
$$= f_k(q, 0, t) + \sum_{j=1}^{f} \left[\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j}\right]_{\dot{q}=0} \dot{q}_j + O(\dot{q}^2) \qquad (5)$$

Betrachte Limes $\dot{q}_k \to 0$: $\Rightarrow$
$$\underbrace{\sum_j \left[\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j}\right]_{\dot{q}=0}}_{M_{kj}} \dot{q}_j \simeq p_k - f_k(q, 0, t) \qquad (6)$$

$\dot{q}$

(5) ist nur nach $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q,p)$ lösbar, falls $M_{kj}$ invertierbar ist, d.h. falls (3) gilt. (7)

Wenn kinetische Energie quadratisch ist in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten und das Potenzial geschwindigkeitsunabhängig, ist das System immer kanonisch:

HS5

Sei $T = \frac{1}{2}\sum_{ij} \dot q_i T_{ij} \dot q_j$ , mit $T_{ij}$ = symmetrisch, positiv definit (alle Eigenwerte sind $>0$) (1)

$\Rightarrow \quad M_{ij} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j} = T_{ij}$ , mit $\det M_{ij} \neq 0$ (2)

---

Beispiel: Kugelkoordinaten:
(siehe Blatt 6, Hausaufg.)

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right) \qquad (3)$$

$$V = 0$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \quad \Rightarrow \quad \dot r = p_r/m \qquad (4)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta \quad \Rightarrow \quad \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2} \qquad (5)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mr^2\sin^2\theta\,\dot\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta} \qquad (6)$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

= invertierbar!

$$H = \sum_k p_k \dot q_k - L = \left[p_r\left(\frac{p_r}{m}\right) + p_\theta\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right) + p_\varphi \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}\right] - L \qquad (7)$$

$$= \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right] \qquad (8)$$

HS6

Eselsbrücke um sich zu merken: H hängt nicht von ab $\dot q$

$$H = \sum_j p_j \dot q_j - L(q,\dot q,t) \qquad (1)$$

$$\left.\frac{\text{"}H(p,q,\dot q)\text{"}}{\partial \dot q_k}\right|_{p=\frac{\partial L}{\partial \dot q}} = p_k - \underbrace{\frac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial \dot q_k}}_{p_k \text{ per Def. von } p_k!} = 0 \qquad (2)$$

Beispiel: freies Teilchen:

$$H = p\dot r - \frac{1}{2}m\dot r^2$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial \dot r}\right|_{p=\dot r} = \left[p - m\dot r\right]_{p=\dot r} = 0$$

Satz: für ein kanonisches System sind die Lagrange-Gleichungen (2. Art) äquivalent zu den "Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (HG)" ("kanonische Bewegungsgleichungen"):

$$\boxed{\forall k=1,\dots,f: \quad \dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (3a) \qquad \dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (3b)} \qquad (HG)$$

Bemerkung: aus f Differentialgleichungen 2. Ordnung (L2) werden äquivalent 2f Diff.Gl. 1. Ordnung (HG). Folglich hat Hamilton-Formalismus mehr unabhängige Variablen (2f statt f), und erlaubt somit eine größere Klasse von Transformationen.
↑ ("kanonische Transf.")

Beweis, Teil 1: Betrachte: $\frac{\partial H}{\partial p_k} \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial p_k}\left[\sum_j p_j \dot{q}_j(q,p,t) - L(q,\dot{q}(q,p,t))\right]$ (1)

(L2) ⇒ (H9)

HS7

(H3.6): $\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = 0$

$$= \dot{q}_k(p,q,t) + \underbrace{\sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j(q,p,t)}{\partial p_k} - \sum_j \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k = (6.3a)$$

Betrachte ferner: $\frac{\partial H}{\partial q_k} \overset{(6.1)}{=} \frac{\partial}{\partial q_k}\left[\sum_j p_j \dot{q}_j(q,p,t) - L(q,\dot{q}(q,p,t))\right]$

(H3.6): $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \underbrace{\sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j(q,p,t)}{\partial q_k} - \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_j \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k}\right]}_{=0} \quad (3)$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q_k} \overset{(L2)}{=} -\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{p_k} \quad (4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k = (6.3b) \checkmark \quad (5)$$

Teil 1: □

H8

Beweis, Teil 2: Gegeben H(q,p,t), drücke Impulse als $p \overset{\text{mittels (H9)}}{=} p(q,\dot{q},t)$ aus, und def. Lagrange-

(H9) ⇒ (L2)

$q \quad \dot{q}$

$$L(q,\dot{q},t) = \sum_j p_j(q,\dot{q},t)\,\dot{q}_j - H(q,p(q,\dot{q},t),t) \quad (1)$$

Betrachte:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \underbrace{\sum_j \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_j + p_k - \sum_j \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j}}_{(H9b)\ \dot{q}_k} \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_k}}_{=0} \quad (2)$$

$= p_k$ reproduziert Def. v. kanonischem Impuls

Betrachte:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \underbrace{\sum_j \frac{\partial p_j}{\partial q_k}\dot{q}_j - \left[\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_k}}_{(H9a):\ -\dot{p}_k} + \sum_j \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j}}_{\dot{q}_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_k}\right]}_{=0} \quad (3)$$

$$= \dot{p}_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \quad \text{reproduziert (L2)} \checkmark \quad (4)$$

HS 9

Satz: Für System mit skleronomen (zeitunabhängigen) Zwangsbedingungen und Geschwindigkeitsunabhängigem Potential ist die Hamilton-Funktion gerade die Gesamtenergie des Systems, ausgedrückt durch die verallgemeinerten Koordinaten und Impulse.

(Bemerkung: in diesem Fall hat H eine klare physikalische Bedeutung! Vorteil gegenüber Lagrange...)

Beweis: Für skleronome Zwangsbedingung ist kinetische Energie eine quadratische Form in den

$$T = \frac{1}{2}\sum_{ij} \dot q_i T_{ij} \dot q_j \quad , \quad V = V(q,t) \qquad (1)$$

Kanonische Impulse:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = \sum_j T_{kj}\dot q_j$$

$$H = \underbrace{\sum_k \dot q_k \overbrace{p_k}^{\sum_j T_{jk}\dot q_j}}_{2T} - L = 2T - (T-V) = T + V \qquad (2)$$

Bemerkung: Sind die Potentiale zeitunabhängig, ist die Hamilton-Funktion eine Erhaltungsgröße (3)

$$\frac{d\,H(q,p,t)}{dt} = \sum_j \left[ \frac{\partial H}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\dot p_k + \overset{=0 \text{ Laut Annahme}}{\frac{\partial H}{\partial t}} \right] \qquad (4)$$

$$\overset{(H9)}{=} \sum_j \left[ -\dot p_k \dot q_k + \dot q_k \dot p_k \right] = 0 \quad \checkmark \qquad (5)$$

□.

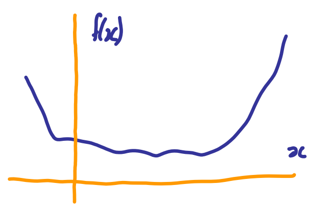
HS 10

Satz: Falls die Hamilton-Funktion nicht von einer bestimmten generalisierten Koordinate abhängt (zyklische Koordinate), ist der dazughörige kanonisch konjugierte Impuls eine Erhaltungsgröße.

(Annahme: $q_k$ ist zyklisch)

Beweis: Aus $0 = \frac{\partial H}{\partial q_k} \overset{(H9)}{=} -\dot p_k$ folgt $\underline{p_k = const.}$ (1) □

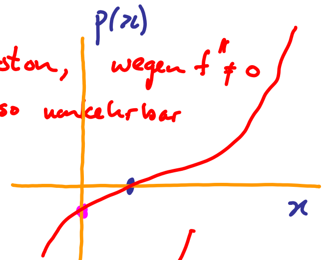
Mathematische Ergänzung: "Legendre-Transformation"




Betrachte Funktion: $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (2)

(x steht für $\dot q$ oben)

mit $f''(x) \neq 0 \quad \forall x$ (3)




monoton, wegen $f'' \neq 0$
also umkehrbar

Definiere die Funktion: $p(x) := f'(x)$ ; (4)

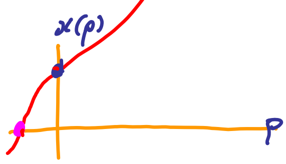
Deren Umkehrfunktion sei $x = x(p)$ ; (5)

(diese existiert wegen $f'' \neq 0$ )

Dann ist die Legendre-Transformierte von $f(x)$

die Funktion

$$\boxed{\tilde f(p) := p\,x(p) - f(x(p))} \qquad (6)$$



**Beispiel:**

HS 11

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} x^{\alpha}, \quad \forall\, x > 0, \quad \alpha \neq 2.$$

$$p(x) = f'(x) = x^{\alpha - 1}$$

$$x(p) = p^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

$$\tilde{f}(p) = \underbrace{p^{1+\frac{1}{\alpha-1}}}_{p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} - \frac{1}{\alpha}\Big[\underbrace{p^{\frac{1}{\alpha-1}}}_{p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\Big]^{\alpha} = \left(\frac{1}{\beta}\right) p^{\beta}$$

mit $\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\beta} p^{\beta}$$

Bemerkung: Die Legendre-Trf. hat interessante mathematische EIgenschaften. Z.B. führt sie zweifach ausgeführt zur Identität. Im Beispiel oben:

$$\tilde{\tilde{f}}(y) = \frac{1}{\gamma} y^{\gamma}, \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{\beta}{\beta - 1} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha-1}}{\frac{\alpha}{\alpha-1} - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - (\alpha - 1)} = \alpha$$

$$= \frac{1}{\alpha} y^{\alpha} = f(y)$$

Bei der Legendre-Trf. geht also keine Information verloren,
nur Wechsel der unabhängigen Variablen.

HS 12

Verallgemeinerung der Legendre-Transformation auf Funktionen mehrerer Variablen:

Betrachte: $f(x_1, \dots, x_f)$ mit $\det\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right] \neq 0$ (1)

($x_k$ steht für $\dot{q}_k$ oben)

Definiere: $p_k := \frac{\partial f}{\partial x_k}$ und Umkehrfunktionen seien $x_k(p)$. (2)

(3)

Legendre-Transf.: $\tilde{f}(p_1, \dots, p_f) := \sum_k \left[p_k x_k(p) - f(x_1(p), \dots, x_f(p))\right]$

Bemerkung:
Damit ist die Hamilton-Funktion die Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion bezüglich der generalisierten Geschwindigkeiten. (Die generalisierten Koordinatien werden nicht transformiert!)