Poisson-Klammern

v23 - 01.07.08 H13

Betrachte zwei physikalische Grössen, die von den Koordinaten, Impulsen und Zeit abhängen:

$$F = F(q,p,t) \qquad g = g(q,p,t) \tag{1}$$

Def: "Poisson-Klammer von F und G":

$$\boxed{\{F, g\} := \sum_{k=1}^{f} \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right]} \tag{2}$$

Einfachste Beispiele: im Hamilton-Formalismus sind p , q , t unabhängige Variablen, also:

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \qquad \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0 \qquad \frac{\partial q_i}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0 \qquad \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

$F = q_i,\ g = q_j$:

$$\{q_i, q_j\} = \sum_{k=1}^{f} \left[\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{=\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{=\delta_{jk}} \right] = 0 \tag{5}$$

$F = p_i,\ g = p_j$:

$$\{p_i, p_j\} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0 \tag{6}$$

$F = q_i,\ g = p_j$:

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - 0 \cdot 0 = \sum_{k=1}^{f} \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij} \tag{7}$$

H14

Satz: Poisson-Klammer hat folgende Eigenschaften:

(i) Antisymmetrie:

$$\{F, g\} = -\{g, F\} \tag{1}$$

(ii) Distribution:

$$\{c_1 F_1 + c_2 F_2, g\} = c_1 \{F_1, g\} + c_2 \{F_2, g\} \tag{2}$$

(iii) "Jacobi-Identität": (zyklische Vertauschung)

$$\{F, \{g, K\}\} + \{K, \{F, g\}\} + \{g, \{K, F\}\} = 0 \tag{3}$$

(iv) "Faktorisierungszerlegung":

$$\{F, gK\} = g\{F, K\} + \{F, g\}K$$
$$\{gK, F\} = g\{K, F\} + \{g, F\}K \tag{4}$$

Satz: Die Zeitabhängigkeit einer beliebigen dynamischen Größe $F(q,p,t)$ ist gegeben durch:

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}} \tag{5}$$

Beweis:

$$\frac{dF(q(t),p(t),t)}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right] + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{6}$$

(H9): $\dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$; $\dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ (H9):

$$= \sum_k \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial F}{\partial p_k}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) \right] + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{7}$$

□

H15

Bemerkungen:

1. Gl. (14.5) enthält u.a. die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen als Spezialfall:

$$F = q_i: \quad \frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i \overset{(14.5)}{=} \{q_i, H\} + \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial t}}_{=0} \overset{(14.7)}{=} \sum_k \delta_{ki} \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (1)$$

$$F = p_i: \quad \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i \overset{(14.5)}{=} \{p_i, H\} + \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial t}}_{=0} \overset{(14.7)}{=} \sum_k \delta_{ki} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (2)$$

2. Eine nicht explizit zeitabhängige Größe ist genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn die Poisson-Klammer mit H verschwindet:

$$\text{falls} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \text{gilt} \quad \{F, H\} = 0 \overset{(14.5)}{\Leftrightarrow} \frac{dF}{dt} = 0 \qquad (3)$$

3. Mittels der Rechenregeln (14.1-4) lässt sich jede Rechnung auf die Grundregeln (13.5-7) reduzieren.

4. Ausblick: Die Quantenmechanik (QM) ist eine andere Realisierung einer Theorie mit
- (13.5-7) als Grundregeln,
- (14.1-4) als Rechenregeln,
- (14.5) als Bewegungsgleichung

H16

Heisenberg lieferte eine Matrix-Formulierung der QM:

- Physikalische Größen: dargestellt durch (unendlich-dimensionale) Matrizen $F \to \hat{F}; \quad G \to \hat{G}$ (1)

- Produkt zweier Größen: Matrixprodukt, nicht kommutativ: $[\hat{F}, \hat{G}] := \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} \neq 0$ (2)

  "Kommutator von $\hat{F}$ und $\hat{G}$"

- Kommutator von Matrizen erfüllt Rechenregeln (14.1-4)!

- Poisson-Klammer der kl. Mech. wird in der QM ersetzt durch: $\{F, G\} \to \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{G}]$ (3)

  $\hbar$ Planck'sche Konst.

- Grundregel (13.5-7): $[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad \cancel{\tfrac{1}{i\hbar}}[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$ (4)

- Bewegungsgl (14.5): $$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (5)$$

Dies ist "Heisenbergs Bewegungsgl. für Operatoren, äquivalent zur Schrödingergl. der Wellenformulierung der QM.

H17

Satz: Die Poisson-Klammer zweier (nicht explizit zeitabhängiger) Erhaltungsgrößen ist selbst eine (nicht explizit zeitabhängige) Erhaltungsgröße.

Beweis: Sei $\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$ und F_1 und F_2 erhalten, (1)

d.h. $\{F_1, H\} = \{F_2, H\} = 0$ (2)

zu zeigen: für $G := \{F_1, F_2\}$ gilt $\underbrace{\frac{\partial G}{\partial t} = 0}_{\text{trivial}}$ und $\{G, H\} = 0$ (3)

Explizit:

$$\{G, H\} = \{\{F_1, F_2\}, H\} \overset{\text{Jacobi, (14.3)}}{=} -\{\underbrace{\{H, F_1\}}_{=0}, F_2\} - \{\underbrace{\{F_2, H\}}_{=0}, F_1\} = 0$$

$\leftarrow$ laut (2) $\rightarrow$

Bemerkung: die Erhaltungsgrößen bilden also eine abgeschlossene "Algebra". hier: Poisson-Klammer
(Siehe Mathematische Def. einer Algebra: Menge von Elementen mit einer Kompositionsregel, laut der die Komposition zweier Elemente der Algebra wieder ein Element der Algebra ist.)
Die Poisson-Klammer-Algebra hat in der Regel nur eine endliche Anzahl von Elementen, da die Poisson-Klammer zweier Größen eine Linearkombination von schon bekannten Erhaltungsgrößen produzieren kann, oder einfach eine Zahl.

H18

Beispiel: Drehimpuls-Algebra

Betrachte f Punktmassen, miteinander wechselwirkend via einem zentralsymmetrischen Potenzial:

$$H = T + V, \quad \text{mit} \quad T = \sum_{j=1}^{f} \tfrac{1}{2} m_j \dot{\vec{r}}_j^{\,2}, \quad V = \tfrac{1}{2} \sum_{i \neq j} v(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (1)$$

Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^{f} \vec{L}_j = \sum_{j=1}^{f} \vec{r}_j \times \vec{p}_j \quad (2)$$

Wir wissen bereits : Gesamtdrehimpulsvektor ist eine Erhaltungsgröße (siehe Seite NM17).
Laut (15.3) muss folglich gelten: $\{\vec{L}, H\} = 0$ (siehe H19 und Übung!) (3)

Die Poisson-Klammer von zwei Komponenten von L (beide Erhaltungsgrößen) liefert (siehe Übung!):

$$\{L_x, L_y\} = L_z$$
$$\{L_y, L_z\} = L_x$$
$$\{L_z, L_x\} = L_y$$

$[\hat{L}_a, \hat{L}_b] = i\hbar\, \varepsilon_{abc} \hat{L}_c \leftarrow$ QM

$$\{L_a, L_b\} = \sum_c \varepsilon_{abc} L_c \quad (4)$$

Levi-Civita

$a, b = x, y, z$

Fazit: Die 3 Komponenten des Drehimpulses bilden eine geschlossen Algebra mit 3 Elementen.

In diesem Beispiel liefert die Poisson-Klammer also keine neuen Erhaltungsgrößen
(in anderen Beispielen könnte das aber durchaus passieren!)

H19

Beispiel:

$\{r_{ai}, r_{bj}\} = 0$ (6a)

$\{p_{ai}, p_{bj}\} = 0$ (6b)

$\{r_{ai}, p_{bj}\} = \delta_{ij}\delta_{ab}$ (6c)

i: Teilchenindex
a: x, y, z

$$\left\{L_{xi}, \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2m_j}\right\} = \frac{1}{2m_j}\{\overbrace{r_{yi}p_{zi} - r_{zi}p_{yi}, \underbrace{p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2}_{2}}^{1}\} \quad (1)$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{2m_i}\left[\{r_{yi}p_{zi}, p_{yj}^2\} - \{r_{zi}p_{yi}, p_{zj}^2\} + 0\right] \quad (2)$$

Zwischenrechnung

$$= \frac{\delta_{ij}}{2m_i}\left[2p_{yi}p_{zi} - 2p_{zi}p_{yi}\right] = 0 \quad (3)$$

Zwischenrechnung 1:

(14.4)
$\{gK, F\} = g\{K, F\} + \{g, F\}K$

$\{F, gK\} = g\{F, K\} + \{F, g\}K$

$$\{\underbrace{r_{yi}}_{g}\underbrace{p_{zi}}_{K}, \underbrace{p_{yj}^2}_{F}\} \overset{(14.4)}{=} r_{yi}\underbrace{\{p_{zi}, p_{yj}^2\}}_{\overset{(6b)}{=0}} + \{r_{yi}, p_{yi}^2\}p_{zi} \quad (4)$$

$$\{r_{yi}, p_{yi}p_{yi}\} \overset{(14.4)}{=} p_{yi}\underbrace{\{r_{yi}, p_{yi}\}}_{1} + \underbrace{\{r_{yi}, p_{yi}\}}_{1}p_{yi} = 2p_{yi} \quad (5)$$

(6b)

(5) in (4)

$$\{r_{yi}p_{zi}, p_{yj}^2\} = 2p_{yi}p_{zi} \quad (7)$$

Analog für 2:

$$\{r_{zi}p_{yi}, p_{zi}^2\} = 2p_{zi}p_{yi} \quad (8)$$

(7), (8) $\rightarrow$ (3)

H20

Analog für L_{yi}, L_{zi} $\Rightarrow$ $\{\vec{L}_i, T\} = 0$ (1)

Analog kann gezeigt werden: $\{\vec{L}, V\} = 0$ (2)
(Übung!)

[Hinweis für Übung: $$\frac{\partial v(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial r_{ak}} = v'(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)\,\frac{r_{ak}(\delta_{ki} - \delta_{kj})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial p_{ak}} = 0 \quad (4)$$

$\Rightarrow \{\vec{L}, H\} = 0.$

Phasenraum und Liouvillescher Satz

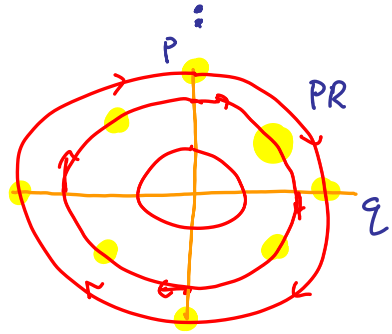
H21

Phasenraum = 2f-dimensionaler Raum der gen. Koordinaten und kanonisch konjugierten Impulse.
Kenntnis der Dynamik bedeutet: Kenntnis der Trajektorien im Phasenraum (PR),

$$x(t) = \left(q_1(t), \ldots, q_f(t), p_1(t), \ldots, p_f(t)\right) \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_i = q_i \\ x_{f+i} = p_i \end{array}\right\} \forall\, i = 1, \ldots, f \qquad := \left(x_1(t), \ldots, x_f(t), x_{f+1}(t), \ldots, x_{2f}(t)\right) \qquad (2)$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator $(f = 1)$



$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m \;, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega^2 q$$

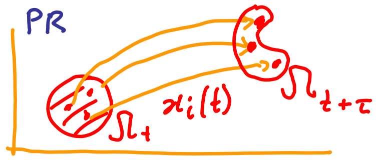
Bewegung verläuft periodisch, mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ unabhängig v. Anfangsbedingungen.

Bewegung im Phasenraum ist analog zu Strömung einer Flüssigkeit, Trajektorien schneiden sich nicht. Welche Eigenschaften hat diese Flüssigkeit? (zum gleichen Zeitpunkt betrachtet)

H22

Satz: Liouvillescher Satz
für ein kanonisches System ist der Fluß im Phasenraum volumenerhaltend (divergenzfrei).

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Vol}\,\Omega_t\right) = 0} \qquad (1)$$



$\mathrm{Vol}\,\Omega_t = \mathrm{Vol}\,\Omega_{t+\tau}$

Beweis: Gegeben sei Volumen im Phasenraum zur Zeit t:

$$\mathrm{Vol}\,\Omega_t = \int_{\Omega_t} dx_1 \ldots dx_{2f} \qquad (2)$$

Dessen Zeitentwicklung wird beschrieben durch Zeitentwicklung der PR-Koordinaten.
Betrachte infinitesimales Zeitinterval:

"im Prinzip bekannte Funktion (via Hamilton-Gl.)" $\dot{x}_i$ ist Funktion von x

$$x_i' = x_i(t+\tau) = x_i(t) + \tau\, \dot{x}_i(x) \qquad (3)$$

$x = (x_1, \ldots, x_{2f})$

Neues Volumen:

$$\mathrm{Vol}\,\underbrace{\Omega_{t+\tau}}_{\Omega'} = \int_{\Omega'} dx_1' \ldots dx_{2f}' \qquad (4)$$

"Jacobi-Determinante"

Variablentransformation zurück zu alten PR-Koordinaten:

$$= \int_{\Omega} dx_1 \ldots dx_{2f}\; \left|\det J(x)\right| \qquad (5)$$

H23

Mathematischer Satz über Koordinatentransformationen bei Integralen:

Für Transformation der Form $\quad x_i' = x_i'(x) \quad , \; i = 1, \ldots, n \quad (n = 2f)$ (1)

transformiert das Volumenelement wie folgt, $\quad dx_1' \ldots dx_n' = dx_1 \ldots dx_n \, |\det J(x)|$ (2)

Mit Jacobi-Determinate: $\quad J_{ij}(x) = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j}$ $\quad$ Ende der Aussage des math. Satzes (3)

$(2f \times 2f)$ - dim Matrix

$$\int dx \overset{y=y(x)}{=} \int \cancel{dy} \frac{\partial x}{\cancel{\partial y}}$$

Hier: (23.1) ist durch (22.3) gegeben, also: $\quad J_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_i + \tau \dot{x}_i(x)\right) = \delta_{ij} + \tau \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}$ (4)

$$\det J = \begin{vmatrix} \left(1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1}\right) & \tau \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} & \cdots & \tau \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_n} \\ \tau \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \left(1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}\right) & \cdots & \tau \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \tau \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_1} & & & \left(1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_n}\right) \end{vmatrix}$$

H24

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - eg)$$

$$\det J = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i}\right) + O(\tau^2) \quad (1)$$

$$= 1 + \tau \sum_{i=1}^{n=2f} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + O(\tau^2) \quad (2)$$

$(1+A)(1+B)(1+C) =$

$1 + A + B + C + AB + BC + ABC$

$i = j, \; j = 1, \ldots, f$ $\qquad$ $i = f + j, \; j = 1, \ldots, f$

$$\left.\begin{aligned} x_i &= q_i \\ x_{f+i} &= p_i \end{aligned}\right\} \forall\, i = 1, \ldots, f \qquad = 1 + \tau \left[\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial}{\partial p_j} \dot{p}_j\right] + O(\tau^2) \quad (3)$$

nutze nun (HG): $\qquad \frac{\partial H}{\partial p_j} \Leftarrow (HG) \Rightarrow -\frac{\partial H}{\partial q_j}$

$$= 1 + \tau \sum_{j=1}^{f} \underbrace{\left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_j}\right]}_{=0} + O(\tau^2) \quad (4)$$

(4) eingesetzt in (22.5) $\qquad$ (5)

$$\mathrm{Vol}\,\Omega_{t+\tau} = \int_{\Omega'} dx_1' \ldots dx_{2f}' = \int_{\Omega} dx_1 \ldots dx_n \left(1 + O(\tau^2)\right) = \mathrm{Vol}\,\Omega_t + O(\tau^2)$$

Hieraus folgt: $\quad \frac{d}{dt} \mathrm{Vol}\,\Omega = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \overbrace{\left[\mathrm{Vol}\,\Omega_{t+\tau} - \mathrm{Vol}\,\Omega_t\right]}^{O(\tau^2)} = \lim_{\tau \to 0} \tau = 0$ (6) □