Poisson-Klammern

V23 - 01.07.08 $\boxed{H13}$

Betrachte zwei physikalische Grössen, die von den Koordinaten, Impulsen und Zeit abhängen:

$$F = F(q,p,t) \qquad g = g(q,p,t) \tag{1}$$

Def: "Poisson-Klammer von F und G":

$$\boxed{\{F, g\} := \sum_{k=1}^{f} \left[\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} \right]} \tag{2}$$

Einfachste Beispiele: im Hamilton-Formalismus sind p , q , t unabhängige Variablen, also:

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \qquad \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0 \qquad \frac{\partial q_i}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0 \qquad \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

$F = q_i,\ g = q_j$:

$$\{q_i, q_j\} = \sum_{k=1}^{f} \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{=\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{=\delta_{jk}} \right) = 0 \tag{5}$$

$F = p_i,\ g = p_j$:

$$\{p_i, p_j\} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0 \tag{6}$$

$F = q_i,\ g = p_j$:

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - 0 \cdot 0 = \sum_{k=1}^{f} \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij} \tag{7}$$

Satz: Poisson-Klammer hat folgende Eigenschaften: $\boxed{H14}$

(i) Antisymmetrie:

$$\{F, g\} = -\{g, F\} \tag{1}$$

(ii) Distribution:

$$\{c_1 F_1 + c_2 F_2, g\} = c_1 \{F_1, g\} + c_2 \{F_2, g\} \tag{2}$$

(iii) "Jacobi-Identität": (zyklische Vertauschung)

$$\{F, \{g, k\}\} + \{k, \{F, g\}\} + \{g, \{k, F\}\} = 0 \tag{3}$$

(iv) "Faktorisierungszerlegung":

$$\{F, gk\} = g\{F, k\} + \{F, g\}k$$
$$\{gk, F\} = g\{k, F\} + \{g, F\}k \tag{4}$$

Satz: Die Zeitabhängigkeit einer beliebigen dynamischen Größe $F(q,p,t)$ ist gegeben durch:

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}} \tag{5}$$

Beweis:

$$\frac{dF(q(t),p(t),t)}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \left[\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt} \right] + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{6}$$

(H9): $\dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$; $\dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ (H9):

$$= \sum_k \left[\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial F}{\partial p_k}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) \right] + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{7}$$

□

H15

Bemerkungen:

1. Gl. (14.5) enthält u.a. die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen als Spezialfall:

$$F = q_i: \quad \frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i \overset{(14.5)}{=} \{q_i, H\} + \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial t}}_{=0} \overset{(14.7)}{=} \sum_k \delta_{ki} \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (1)$$

$$F = p_i: \quad \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i \overset{(14.5)}{=} \{p_i, H\} + \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial t}}_{=0} \overset{(14.7)}{=} \sum_k \delta_{ki} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (2)$$

2. Eine nicht explizit zeitabhängige Größe ist genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn die Poisson-Klammer mit H verschwindet:

$$\text{falls} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \text{gilt} \quad \{F, H\} = 0 \overset{(14.5)}{\Leftrightarrow} \frac{dF}{dt} = 0 \qquad (3)$$

3. Mittels der Rechenregeln (14.1-4) lässt sich jede Rechnung auf die Grundregeln (13.5-7) reduzieren.

4. Ausblick: Die Quantenmechanik (QM) ist eine andere Realisierung einer Theorie mit
- (13.5-7) als Grundregeln,
- (14.1-4) als Rechenregeln,
- (14.5) als Bewegungsgleichung

H16

Heisenberg lieferte eine Matrix-Formulierung der QM:

- Physikalische Größen: dargestellt durch (unendlich-dimensionale) Matrizen $F \to \hat{F}; \quad G \to \hat{G}$ (1)

- Produkt zweier Größen: Matrixprodukt, nicht kommutativ: $[\hat{F}, \hat{G}] := \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} \neq 0$ (2)

"Kommutator von $\hat{F}$ und $\hat{G}$"

- Kommutator von Matrizen erfüllt Rechenregeln (14.1-4)!

- Poisson-Klammer der kl. Mech. wird in der QM ersetzt durch: $\{F, G\} \to \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{G}]$ (3)

$\hbar$ Planck'sche Konst.

- Grundregel (13.5-7): $[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad \cancel{\tfrac{1}{i\hbar}}[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$ (4)

- Bewegungsgl (14.5): $$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (5)$$

Dies ist "Heisenbergs Bewegungsgl. für Operatoren, äquivalent zur Schrödingergl. der Wellenformulierung der QM.

Satz: Die Poisson-Klammer zweier (nicht explizit zeitabhängiger) Erhaltungsgrößen ist selbst eine (nicht explizit zeitabhängige) Erhaltungsgröße. $\boxed{H17}$

Beweis: Sei $\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$ und F_1 und F_2 erhalten, (1)

d.h. $\{F_1, H\} = \{F_2, H\} = 0$ (2)

zu zeigen: für $g := \{F_1, F_2\}$ gilt $\underbrace{\frac{\partial g}{\partial t} = 0}_{\text{trivial}}$ und $\{g, H\} = 0$ (3)

Explizit: $\{g, H\} = \{\{F_1, F_2\}, H\}$

$$\overset{\text{Jacobi, (14.3)}}{=} - \{\underbrace{\{H, F_1\}}_{=0}, F_2\} - \{\underbrace{\{F_2, H\}}_{=0} F_1\} = 0$$

$\leftarrow$ laut (2) $\rightarrow$

Bemerkung: die Erhaltungsgrößen bilden also eine abgeschlossene "Algebra". hier: Poisson-Klammer
(Siehe Mathematische Def. einer Algebra: Menge von Elementen mit einer Kompositionsregel, laut der die Komposition zweier Elemente der Algebra wieder ein Element der Algebra ist.)
Die Poisson-Klammer-Algebra hat in der Regel nur eine endliche Anzahl von Elementen, da die Poisson-Klammer zweier Größen eine Linearkombination von schon bekannten Erhaltungsgrößen produzieren kann, oder einfach eine Zahl.

Beispiel: Drehimpuls-Algebra $\boxed{H18}$

Betrachte f Punktmassen, miteinander wechselwirkend via einem zentralsymmetrischen Potenzial:

$H = T + V$, mit $T = \sum_{j=1}^{f} \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{r}}_j^{\,2}$, $V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ (1)

Gesamtdrehimpuls: $\vec{L} = \sum_{j=1}^{f} \vec{L}_j = \sum_{j=1}^{f} \vec{r}_j \times \vec{p}_j$ (2)

Wir wissen bereits : Gesamtdrehimpulsvektor ist eine Erhaltungsgröße (siehe Seite NM17).
Laut (15.3) muss folglich gelten: $\{\vec{L}, H\} = 0$ (siehe H19 und Übung!) (3)

Die Poisson-Klammer von zwei Komponenten von L (beide Erhaltungsgrößen) liefert (siehe Übung!):

$$\{L_x, L_y\} = L_z$$
$$\{L_y, L_z\} = L_x$$
$$\{L_z, L_x\} = L_y$$

$$\{L_a, L_b\} = \sum_c \varepsilon_{abc} L_c \qquad (4)$$

Levi-Civita

$a, b = x, y, z$

$[\hat{L}_a, \hat{L}_b] = i\hbar\, \varepsilon_{abc} \hat{L}_c \leftarrow$ QM

Fazit: Die 3 Komponenten des Drehimpulses bilden eine geschlossen Algebra mit 3 Elementen.

In diesem Beispiel liefert die Poisson-Klammer also keine neuen Erhaltungsgrößen
(in anderen Beispielen könnte das aber durchaus passieren!)

H19

Beispiel:

$\{r_{ai}, r_{bj}\} = 0$ (6a)

$\{p_{ai}, p_{bj}\} = 0$ (6b)

$\{r_{ai}, p_{bj}\} = \delta_{ij}\,\delta_{ab}$ (6c)

i: Teilchenindex
a: x, y, z

$$\left\{L_{xi}, \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2m_j}\right\} = \frac{1}{2m_j}\{\underbrace{r_{yi}p_{zi} - r_{zi}p_{yi}}_{①},\ \underbrace{p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2}_{②}\} \qquad (1)$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{2m_i}\Big[\underbrace{\{r_{yi}p_{zi}, p_{yj}^2\}}_{①} - \underbrace{\{r_{zi}p_{yi}, p_{zj}^2\}}_{②} + 0\Big] \qquad (2)$$

$\}$ Zwischenrechnung $\}$

$$= \frac{\delta_{ij}}{2m_i}\Big[2p_{yi}p_{zi} - 2p_{zi}p_{yi}\Big] = 0 \qquad (3)$$

Zwischenrechnung ①:

(14.4)
$\{GK, F\} = G\{K,F\} + \{G,F\}K$;

$\{F, GK\} = G\{F,K\} + \{F,G\}K$;

$$\{\underbrace{r_{yi}}_{G}\,\underbrace{p_{zi}}_{K},\ \underbrace{p_{yj}^2}_{F}\} \overset{(14.4)}{=} r_{yi}\underbrace{\{p_{zi}, p_{yj}^2\}}_{\overset{(6b)}{=}0} + \{r_{yi}, p_{yi}^2\}\,p_{zi} \qquad (4)$$

$$\{r_{yi}, p_{yi}p_{yi}\} \overset{(14.4)}{=} p_{yi}\underbrace{\{r_{yi}, p_{yi}\}}_{1} + \underbrace{\{r_{yi}, p_{yi}\}}_{\overset{(6b)}{1}}p_{yi} = 2p_{yi} \qquad (5)$$

(5) in (4)

$$\{r_{yi}p_{zi}, p_{yj}^2\} = 2p_{yi}p_{zi} \qquad (7)$$

Analog für ②:

$$\{r_{zi}p_{yi}, p_{zi}^2\} = 2p_{zi}p_{yi} \qquad (8)$$

(7), (8) $\rightarrow$ (3)

H20

Analog für L_{yi}, L_{zi} $\Rightarrow$ $\{\vec{L}_i, T\} = 0$ (1)

Analog kann gezeigt werden: (Übung!) $\{\vec{L}, V\} = 0$ (2)

[Hinweis für Übung:

$$\frac{\partial v(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial r_{ak}} = v'(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)\,\frac{r_{ak}(\delta_{ki} - \delta_{kj})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial p_{ak}} = 0 \qquad (4)$$

$\Rightarrow \{\vec{L}, H\} = 0.$

Phasenraum und Liouvillescher Satz

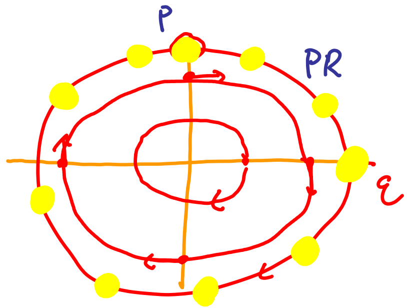
H21

Phasenraum = 2f-dimensionaler Raum der gen. Koordinaten und kanonisch konjugierten Impulse. $\to \mathbb{R}^{2f}$
Kenntnis der Dynamik bedeutet: Kenntnis der Trajektorien im Phasenraum (PR),

$$x(t) = \left(q_1(t), \dots, q_f(t), p_1(t), \dots, p_f(t) \right) \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_i &= q_i \\ x_{f+i} &= p_i \end{aligned}\right\} \forall\, i = 1, \dots, f \qquad := \left(x_1(t), \dots, x_f(t), x_{f+1}(t), \dots, x_{2f}(t) \right) \qquad (2)$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator $(f = 1)$



$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q$$

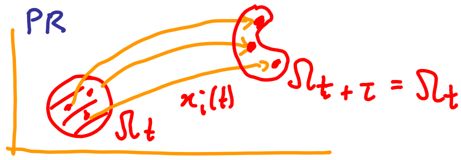
Bewegung verläuft periodisch, mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ unabhängig v. Anfangsbedingungen.

Bewegung im Phasenraum ist analog zu Strömung einer Flüssigkeit, Trajektorien schneiden sich nicht. Welche Eigenschaften hat diese Flüssigkeit?

H22

Satz: Liouvillescher Satz
für ein kanonisches System ist der Fluß im Phasenraum volumenerhaltend (divergenzfrei).

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Vol}\,\Omega_t\right) = 0} \qquad (1)$$



Beweis: Gegeben sei Volumen im Phasenraum zur Zeit t: $x = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$

$$\mathrm{Vol}\,\Omega_t = \int_{\Omega_t} dx_1 \dots dx_{2f} \qquad (2)$$

Dessen Zeitentwicklung wird beschrieben durch Zeitentwicklung der PR-Koordinaten.
Betrachte infinitesimales Zeitinterval:

$\dot{x}_i$ ist Funktion von x

$$x_i' = x_i(t+\tau) = x_i(t) + \tau\, \dot{x}_i(x) \qquad (3)$$

Neues Volumen:

$$\mathrm{Vol}\,\underbrace{\Omega_{t+\tau}}_{\Omega'} = \int_{\Omega'} dx_1' \dots dx_{2f}' \qquad (4)$$

"Jacobi-Determinante"

Variablentransformation zurück zu alten PR-Koordinaten:

$$= \int_{\Omega} dx_1 \dots dx_{2f}\, \left|\det J(x)\right| \qquad (5)$$

Mathematischer Satz über Koordinatentransformationen bei Integralen: H23

Für Transformation der Form $x_i' = x_i'(x)\,,\quad i = 1,\dots,n \quad (n = 2f)$ (1)

transformiert das Volumenelement wie folgt, $dx_1' \dots dx_n' = dx_1 \dots dx_n \, |\det J(x)|$ (2)

Mit Jacobi-Determinate: $J_{ij}(x) = \dfrac{\partial x_i'}{\partial x_j}$ (3)

$(2f\times 2f)$-dim. Matrix

Ende der Aussage des math. Satzes

$$\text{„}\int dx \overset{y=y(x)}{=} \int \cancel{dy}\, \frac{\partial x}{\cancel{\partial y}}\text{“}$$

Hier: (23.1) ist durch (22.3) gegeben, also: $J_{ij} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(x_i + \tau\, \dot{x}_i(x)\right) = \delta_{ij} + \tau \dfrac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}$ (4)

$$J = \begin{bmatrix} \left(1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1}\right) & \tau \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} & \cdots & \tau \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_n} \\ \tau \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \left(1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}\right) & \cdots & \tau \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \tau \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_1} & & & \left(1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_n}\right) \end{bmatrix}$$

H24

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}_{3\times 3} = \begin{array}{l} a(ei - hf) \\ -b(di - gf) \\ c(dh - eg) \end{array}$$

$$\det J = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i}\right) + O(\tau^2) \quad (1)$$

$(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + (a+b+c)$

$ab + bc + ac + abc$

$$= 1 + \tau \sum_{i=1}^{n=2f} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + \underline{O(\tau^2)} \quad (2)$$

$i = j,\ j = 1,\dots,f \qquad i = f+j,\ j = 1,\dots,f$

$$\left.\begin{array}{l} x_i = q_i \\ x_{f+i} = p_i \end{array}\right\} \forall\, i = 1,\dots,f$$

$$= 1 + \tau \left[\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial}{\partial q_j} \underbrace{\dot{q}_j}_{\frac{\partial H}{\partial p_j}} + \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial}{\partial p_j} \underbrace{\dot{p}_j}_{-\frac{\partial H}{\partial q_j}} \right] + O(\tau^2) \quad (3)$$

(HG)

nutze nun (HG):

$$= 1 + \tau \sum_{j=1}^{f} \underbrace{\left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_j} \right]}_{=0} + O(\tau^2) \quad (4)$$

(4) eingesetzt in (22.5) (5)

$$\mathrm{Vol}\,\Omega_{t+\tau} = \int_{\Omega'} dx_1' \dots dx_{2f}' = \int_{\Omega} dx_1 \dots dx_n + O(\tau^2) = \mathrm{Vol}\,\Omega_t + O(\tau^2)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Vol}\,\Omega = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \overbrace{\left[\mathrm{Vol}\,\Omega_{t+\tau} - \mathrm{Vol}\,\Omega_t \right]}^{\tau^2} = 0 \quad (6)$$

q.e.d.