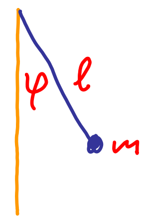
Ergänzende Bemerkungen zum Liouville-Theorem: V24 - 03.07.2007 H25

a) In der Regel wird ein Gebiet im Phasenraum im Laufe der Zeit stark deformiert.

Beispiel: Ebenes mathematisches Pendel



Lagrange: $L = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2 + mg\ell[\cos\varphi - 1]$

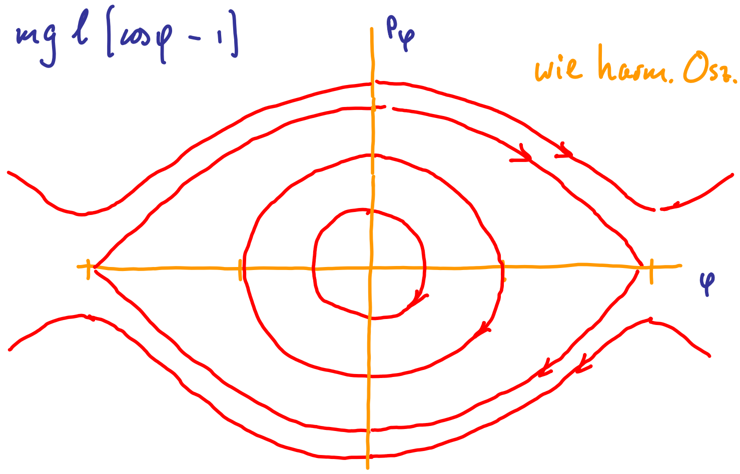
Kanonischer Impuls: $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2\dot{\varphi}$

Hamilton: $H = \frac{p_\varphi^2}{2m\ell^2} - mg\ell[\cos\varphi - 1]$

Ham. Bew.Gl.:

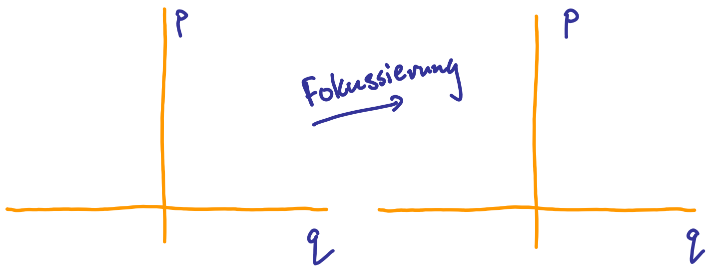
$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} =$

$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} =$



b) Geladenes Teilchen in äußerem Magnetfeld ist ein kanonisches System. H26

Anwendung: Fokussierung eines Teilchenstrahls im Beschleuniger
- Um bessere Ortsfokussierung des Teilchenstrahls zu erreichen, ist, laut Liouvilleschem Satz, eine breitere Impulsverteilung nötig!



Allgemein gilt:

Die Dynamik im 2f-dimensionalen Phasenraum ist eingeschränkt durch folgende Eigenschaften:

- Trajektorien kreuzen sich nicht
- Erhaltungsgrößen (schränken Dynamik auf bestimmte Manigfaltigkeiten ein mit
- Liouvillescher Satz gilt.

Kanonische Transformationen

H27

Erinnerung: Hamiltonsches Extremalprinzip: Die Wirkung ist bei vorgegebenen Randbedingungen stationär für die physikalischen Trajektorien:

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\dot q,t) \tag{1}$$

Dieses Extremalprinzip gilt auch bie Variationen im Phasenraum, der ja größer ist als der Koordinatenraum!

Satz ("modifiziertes Hamiltonsches Prinzip"): $S[q,p] = \int dt \left[\sum_k p_k \dot q_k - H(q,p,t) \right]$ (2)

$$\delta S[\quad] = \quad , \text{ mit } \left\{ \begin{array}{ll} \delta\ (t_1) = \delta\ (t_2) = & \text{(3a)} \\ \delta\ (t_1) = \delta\ (t_2) = & \text{(3b)} \end{array} \right\} \iff \text{Hamiltonschen Bewegungsgleichungen} \tag{3}$$

Beweis:
Euler-Lagrange-Gl.
angewandt auf

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot q_k} = \frac{\partial G}{\partial q_k} \Rightarrow \tag{4a}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot p_k} = \frac{\partial G}{\partial p} \Rightarrow \tag{4b}$$

H28

Bemerkung: Da $G(q,p,\dot q,\dot p,t)$ de facto NICHT von abhängt, ist Bedingung (27.3b) nicht für Herleitung des Satzes erforderlich.

(27.3b) wäre nötig für part. Integr. bei: $\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial G}{\partial \dot p}\delta \dot p = -\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot p}\right)\delta p + \frac{\partial G}{\partial \dot p}\delta p \Big|_{t_2}^{t_1}$ (1)

Also ist Bedingung (27.3a) ausreichend, und gilt das modifizierte Hamiltonsche Prinzip unter genau denselben Voraussetzungen wie das ursprüngliche Hamiltonsche Prinzip für $L(q,\dot q,t)$] .
Dennoch schränken wir vortan Betrachtung ein auf Bedingung, dass (27.3a) und (27.3b) gelten.
(Grund: siehe unten).

Betrachte nun Transformationen von alten zu neuen Variablen,

$$\left. \begin{array}{l} q_1, \dots, q_f \\ p_1, \dots, p_f \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} Q_K \\ P_K \end{array} \tag{2}$$

Ziel: neuen Bewegungsgleichungen sollen einfacher als alten sein!

Definition: Variablentransformation d. Form (2) heisst "kanonisch", wenn sie d. Form der kanonischen Bewegungsgleichungen erhält, d.h., wenn ein existiert, für das gilt:

$$\boxed{\dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \longrightarrow \qquad\qquad} \tag{3}$$

Bemerkung: (28.2) erlaubt Mischung v. Koordinaten und Impulsen, d.h. Klasse v. Transf. ist größer als i.d. Lagrangeschen Formulierung, wo nur Transf. im Koordinatenraum vorgesehen sind: **H29**

$Q_k =$

Allgemeine Konstruktion einer kanonischen Transformation:
Da Hamilton-Gleichungen äquivalent zum modifizierten Ham. Variationsprinzip sind, muss gelten:

p,q kanonisch: $\Leftrightarrow \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t) \right] \overset{(27.3)}{=} 0, \quad \text{mit } \begin{matrix} \delta q(1) = \delta q(2) = 0 \\ \delta p(1) = \delta p(2) = 0 \end{matrix}$ (3)

P,Q kanonisch: (4)

(3) und (4) sind gleichzeitig erfüllt, falls

beliebige Funktion mit stetigen 2.ten Ableitungen

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t) = \sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q_k, P_k, t) \tag{5}$$

denn Zusatzterm liefert: (6)

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{dt} F(q+\delta q, p+\delta p, Q+\delta Q, P+\delta P) = F(q,p,Q,P) - F(q,p,Q,P)$$

Bemerkung: Da nur zwei der vier Variablensätze q, p, Q, P unabhängig sind, gibt es vier verschiedene Klassen von "Erzeugenden" F. (Je nach Problemstellung ist eine nützlicher als die anderen.) **H30**

$$F = F_1(q, Q, t) \tag{1}$$

$$F = F_2(q, P, t) - \sum_k Q_k P_k \tag{2}$$

$$F = F_3(p, Q, t) + \sum_k q_k p_k \tag{3}$$

$$F = F_4(p, P, t) + \sum_k q_k p_k - \sum Q_k P_k \tag{4}$$

Betrachte zunächst F1.
Die Form von F1 bestimmt Form der Transformation, wie folgt:

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q,p,t) \overset{(29.5)}{=} \sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q,P,t) + \frac{d}{dt} F_1(q,Q,t) \tag{5}$$

(5) ist identisch erfüllt, falls:

$p_k \overset{①}{=}$ (7)

$P_k \overset{②}{=}$ (8)

(7), (8) auflösen nach: (9a) (9b)

$\tilde{H} \overset{③}{=}$ (10)

Beispiel: Harmonischer Oszillator

H31

Hamilton-Funktion: $H(q,p,t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$ (1)

Ansatz für F1: Wähle $F_1(q, Q, t) =$ (2)

(30.7): $p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$ (3)

(30.9): $P = \frac{\partial F_1}{\partial Q}$ (4)

(3), (4) auflösen, nach q=q(Q,P,t), p=p(Q,P,t): $q(Q,P) \overset{(4)}{=}$ (5)

(5) in (3): $p(Q,P) =$ (6)

(5),(6) in (1) $\tilde{H}(Q,P,t) = \frac{1}{2m}(\quad)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (\quad)^2$ (7)

$\boxed{\tilde{H}(Q,P,t) = \quad}$ (8)

H32

Kanonische Gl.: $\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}$ (1)

$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}$ (2)

Eingesetzt in q, p: $q(t) \overset{(31.5)}{=}$ (3)

$p(t) \overset{(31.6)}{=}$ (4)

korrekte, bekannte Lösung!

Bemerkungen:
Konstruktion einer zyklischen Variable erfordert Mischung von Ort- und Impulsvariablen.
Lohn der Mühen: neue Hamilton-Funktion ist extrem einfach!

Grundidee hinter dieser Konstruktion:
Wenn F1 von q,Q,t abhängt, brauchen wir Gleichungen, für p und P [siehe (2) und (3)].
Diese bekommen wir, durch Vergleich der Koeffizienten von und in (3).
Analog für F2(q,P,t), F3(p,Q,t), F4(p,P,t).

Analog für andere Tr.-Klassen: (29.5), mit Einsteinscher Summenkonvention:

$$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{dF}{dt} = \tilde{H}(Q,P,t) - H(q,p,t)$$

(1a) (1b)

H33

gilt für alle Klassen von F

Erzeugende F	(1a) $=0$	Gleichungen benötigt für	Koeff.-Vergleich
$F=$	$-p_k\dot{q}_k + P_k\dot{Q}_k$	$=$ (2a) , $=$ (2b)	
$F = F_2(q,P,t)$	$-p_k\dot{q}_k + P_k\dot{Q}_k$	$p_k =$ (3a) , $Q_k =$ (3b)	
$F = F_3(p,Q,t)$	$-p_k\dot{q}_k + P_k\dot{Q}_k + \frac{\partial F_3}{\partial p_k}\dot{p}_k + \frac{\partial F_3}{\partial Q_k}\dot{Q}_k$	$q_k =$ (4a) , $P_k =$ (4b)	$\dot{p}_k, \dot{Q}_k$
$F = F_4(p,P,t) + q_k p_k - Q_k P_k$	$-\cancel{p_k\dot{q}_k} + \cancel{P_k\dot{Q}_k} + \frac{\partial F_4}{\partial p_k}\dot{p}_k + \frac{\partial F_4}{\partial P_k}\dot{P}_k + \cancel{\dot{q}_k p_k} + q_k\dot{p}_k - \cancel{\dot{Q}_k P_k} - Q_k\dot{P}_k$	$q_k = -\frac{\partial F_4}{\partial p_k}$ (5a) , $Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k}$ (5b)	$\dot{p}_k, \dot{P}_k$

H34

Bemerkung: Die Definitionen F2, F3 und F4 können als Legendre-Transformationen von F1 aufgefasst werden, und umgekehrt.

Beispiel in Klasse F2:
Betrachte erzeugende der Form:

$$F_2(q,P,t) = \quad (1)$$

(33-3a) $$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = \quad (2)$$

(33.3b) $$Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = \quad (3)$$

(3) umfasst alle bekannte Koordinatentransformationen der Lagrangeschen Mechanik (sogenannte Punkttransformationen)

Spezielle Wahl von f:

$f_j =$

$$F_2(q,P,t) \overset{(1)}{=} \quad (4)$$

$$P_k \overset{(2)}{=}$$

$$Q_k \overset{(3)}{=} \quad (5)$$

Satz: Eine gegebene Transformation

$$Q = Q(q,p,t) \quad , \quad P = P(q,p,t) \tag{1}$$

ist genau dann kanonisch, wenn folgende Poisson-Klammer-Relationen erfüllt sind,

$$\{Q_i, P_j\} = \tag{2}$$

$$\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = \tag{3}$$

wobei die Poisson-Klammern bezüglich q,p zu berechnen sind:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial} \frac{\partial B}{\partial} - \frac{\partial A}{\partial} \frac{\partial B}{\partial} \tag{4}$$

Beweis: Übungsaufgabe

Bemerkung: dieser Satz hat wichtige Anwendungen in der Quantenmechanik, wegen

$$\{\ ,\ \} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]$$