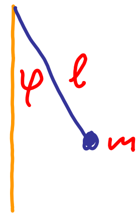
Ergänzende Bemerkungen zum Liouville-Theorem: V24 - 03.07.2007 H25

a) In der Regel wird ein Gebiet im Phasenraum im Laufe der Zeit stark deformiert.

Beispiel: Ebenes mathematisches Pendel

Lagrange: $L = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2 + mg\ell[\cos\varphi - 1]$



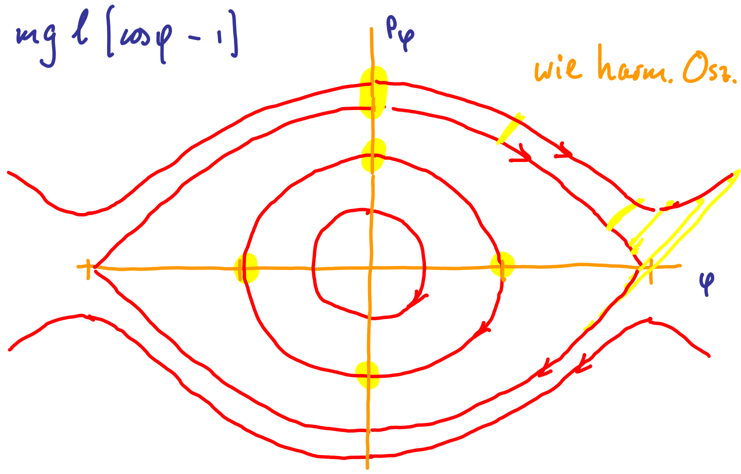
Kanonischer Impuls: $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2 \dot{\varphi}$

Hamilton: $H = \frac{p_\varphi^2}{2m\ell^2} - mg\ell[\cos\varphi - 1]$

Ham. Bew.Gl.

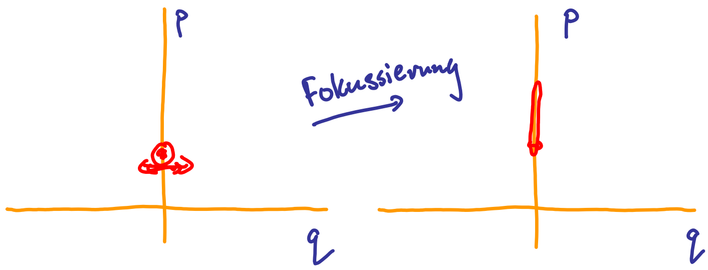
$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} =$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} =$$



b) Geladenes Teilchen in äußerem Magnetfeld ist ein kanonisches System. H26

Anwendung: Fokussierung eines Teilchenstrahls im Beschleuniger
- Um bessere Ortsfokussierung des Teilchenstrahls zu erreichen, ist, laut Liouvilleschem Satz, eine breitere Impulsverteilung nötig!



Allgemein gilt:

Die Dynamik im 2f-dimensionalen Phasenraum ist eingeschränkt durch folgende Eigenschaften:

- Trajektorien kreuzen sich nicht
- Erhaltungsgrößen (schränken Dynamik auf bestimmte Manigfaltigkeiten ein mit $I = I(q,p) = \text{const.}$
- Liouvillescher Satz gilt.

Kanonische Transformationen

$$H(q,p) = p\,\dot q(q,p) - L(q,\dot q(q,p))$$ H27

Erinnerung: Hamiltonsches Extremalprinzip: Die Wirkung ist bei vorgegebenen Randbedingungen stationär für die physikalischen Trajektorien:

$$\delta S[q] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\dot q,t) = 0 \quad \text{für} \quad \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (LG2).$$

Dieses Extremalprinzip gilt auch bie Variationen im Phasenraum, der ja größer ist als der Koordinatenraum!

$$G(x,\dot x) = G(q,p,\dot q,\cancel{\dot p})$$

Satz ("modifiziertes Hamiltonsches Prinzip"):

$$S[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_k p_k \dot q_k - H(q,p,t)\right] \qquad (2)$$

$$\delta S[q,p] = 0, \quad \text{mit} \quad \left\{\begin{array}{ll} \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 & (3a) \\ \delta p(t_1) = \delta p(t_2) = 0 & (3b) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{Hamiltonschen Bewegungsgleichungen} \qquad (3)$$

Beweis: $x = (q,p)$

Euler-Lagrange-Gl. angewandt auf $\frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot x} = \frac{\partial G}{\partial x}$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot q_k} = \frac{\partial G}{\partial q_k} \Rightarrow & \frac{d}{dt} p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot p_k} = \frac{\partial G}{\partial p} \Rightarrow & 0 = \dot q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{array}\right\} = (HG) \checkmark \qquad \begin{array}{l}(4a)\\(4b)\end{array}$$

Bemerkung: Da $G(q,p,\dot q,\cancel{\dot p},t)$ de facto NICHT von $\dot p$ abhängt, ist Bedingung (27.3b) nicht für Herleitung des Satzes erforderlich. H28

(27.3b) wäre nötig für part. Integr. bei:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial G}{\partial \dot p}\right)\delta\dot p = -\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot p}\right)\delta p + \overbrace{\cancel{\frac{\partial G}{\partial \dot p}\,\delta p\Big|_{t_1}^{t_2}}}^{(27.3b)\ =0} \qquad (1)$$

ist aber ohnehin $= 0$ in (27.2)

Also ist Bedingung (27.3a) ausreichend, und gilt das modifizierte Hamiltonsche Prinzip unter genau denselben Voraussetzungen wie das ursprüngliche Hamiltonsche Prinzip für $L(q,\dot q,t)$] .
Dennoch schränken wir vortan Betrachtung ein auf Bedingung, dass (27.3a) und (27.3b) gelten. (Grund: siehe unten).

Betrachte nun Transformationen von alten zu neuen Variablen,

$$\left.\begin{array}{l} q_1,\dots,q_f \\ p_1,\dots,p_f \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} Q_k = Q_k(q_1,\dots,q_f,p_1,\dots,p_f) \\ P_k = P_k(q_1,\dots,q_f,p_1,\dots,p_f) \end{array} \qquad (2)$$

Ziel: neuen Bewegungsgleichungen sollen einfacher als alten sein!

Definition: Variablentransformation d. Form (2) heisst "kanonisch", wenn sie d. Form der kanonischen Bewegungsgleichungen erhält, d.h., wenn ein $\tilde H(Q,P,t)$ existiert, für das gilt:

$$\boxed{\dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \longrightarrow \dot Q_k = \frac{\partial \tilde H}{\partial P_k}, \quad \dot P_k = -\frac{\partial \tilde H}{Q_k}} \qquad (3)$$

H 29

Bemerkung: (28.2) erlaubt Mischung v. Koordinaten und Impulsen, d.h. Klasse v. Transf. ist größer als i.d. Lagrangeschen Formulierung, wo nur Transf. im Koordinatenraum vorgesehen sind: $Q_k = Q_k(q_1, \dots, q_f, t)$

Allgemeine Konstruktion einer kanonischen Transformation:
Da Hamilton-Gleichungen äquivalent zum modifizierten Ham. Variationsprinzip sind, muss gelten:

p,q kanonisch: $\Leftrightarrow$ $$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t)\right] \overset{(27.3)}{=} 0, \quad \text{mit } \delta q(1) = \delta q(2) = 0, \; \delta p(1) = \delta p(2) = 0 \qquad (3)$$

P,Q kanonisch: $\Leftrightarrow$ $$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q,P,t)\right] = 0, \quad \text{mit } \delta Q(1) = \delta Q(2) = 0, \; \delta P(1) = \delta P(2) = 0 \qquad (4)$$

"Erzeugende Funktion"

(3) und (4) sind gleichzeitig erfüllt, falls

beliebige Funktion mit stetigen 2.ten Ableitungen

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t) = \sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q_k, P_k, t) + \frac{d}{dt} F(q, p, Q, P, t) \qquad (5)$$

denn Zusatzterm liefert:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{dt} F(q+\delta q, p+\delta p, Q+\delta Q, P+\delta P) = \underbrace{\delta\left(F(q,p,Q,P)\Big|_{t_2} - F(q,p,Q,P)\Big|_{t_1}\right)}_{=0} \qquad (6)$$

H 30

Bemerkung: Da nur zwei der vier Variablensätze q, p, Q, P unabhängig sind, gibt es vier verschiedene Klassen von "Erzeugenden" F. (Je nach Problemstellung ist eine nützlicher als die anderen.)

$$F = F_1(q, Q, t) \qquad (1)$$
$$F = F_2(q, P, t) - \sum_k Q_k P_k \qquad (2)$$
$$F = F_3(p, Q, t) + \sum_k q_k p_k \qquad (3)$$
$$F = F_4(p, P, t) + \sum_k q_k p_k - \sum Q_k P_k \qquad (4)$$

nächstes Mal

Betrachte zunächst F1.
Die Form von F1 bestimmt Form der Transformation, wie folgt:

$$\underset{①}{\sum_k p_k \dot{q}_k} - \underset{③}{H(q,p,t)} \overset{(29.5)}{=} \underset{②}{\sum_k P_k \dot{Q}_k} - \underset{③}{\tilde{H}(Q,P,t)} + \underbrace{\sum_k \left[\underset{①}{\frac{\partial F_1}{\partial q_k} \dot{q}_k} + \underset{②}{\frac{\partial F_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k}\right] + \underset{③}{\frac{\partial F}{\partial t}}}_{\frac{d}{dt} F_1(q,Q,t)} \qquad (5)$$

(5) ist identisch erfüllt, falls:

$$p_k(q,Q,t) \overset{①}{=} \frac{\partial F_1}{\partial q_k}(q,Q,t) \qquad (7)$$

$$P_k(q,Q,t) \overset{②}{=} -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}(q,Q,t) \qquad (8)$$

(7), (8) auflösen nach: $q = q(Q,P,t)$ (9a), $p = p(Q,P,t)$ (9b)

$$\tilde{H}(Q,P,t) \overset{③}{=} \left[H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q,Q,t)\right]_{\overset{(9a)}{q = q(Q,P,t)},\; \overset{(9b)}{p = p(Q,P,t)}} \qquad (10)$$

H31

Beispiel: Harmonischer Oszillator

Hamilton-Funktion: $$H(q,p,t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \qquad (1)$$

Ansatz für F1: Wähle $$F_1(q,Q,t) = \frac{\omega}{2} m q^2 \cot Q \qquad (2)$$

(30.7): $$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \omega m q \cot Q \qquad (3)$$

(30.9): $$P = \frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{\frac{1}{2} m\omega q^2}{\sin^2 Q} \qquad (4)$$

(3), (4) auflösen, nach q=q(Q,P,t), p=p(Q,P,t): $$q(Q,P) \overset{(4)}{=} \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \qquad (5)$$

(5) in (3): $$p(Q,P) = \sqrt{m\omega}\sqrt{\frac{2P}{\cancel{m\omega}}}\, \cancel{\sin Q}\, \frac{\cos Q}{\cancel{\sin Q}} = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \qquad (6)$$

(5),(6) in (1) $$\tilde{H}(Q,P,t) \overset{(6),(5)}{=} \frac{1}{2m}\left(\sqrt{2m\omega P}\cos Q\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q\right)^2 \qquad (7)$$

$$\boxed{\tilde{H}(Q,P,t) = \omega P} \Rightarrow Q \text{ ist zyklisch !!} \qquad (8)$$

H32

Kanonische Gl.: $$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{const} = c \qquad (1)$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega \rightarrow Q(t) = \omega t + \alpha \qquad (2)$$

Eingesetzt in q, p:

$$q(t) \overset{(31.5)}{=} \sqrt{\frac{2c}{m\omega}} \sin(\omega t + \alpha) \qquad (3)$$

$$p(t) \overset{(31.6)}{=} \sqrt{2m\omega c} \cos(\omega t + \alpha) \qquad (4)$$

korrekte, bekannte Lösung!

WOW!

Bemerkungen:
Konstruktion einer zyklischen Variable erfordert Mischung von Ort- und Impulsvariablen.
Lohn der Mühen: neue Hamilton-Funktion ist extrem einfach!

Grundidee hinter dieser Konstruktion:
Wenn F1 von q,Q,t abhängt, brauchen wir Gleichungen, für p und P [siehe (2) und (3)].
Diese bekommen wir, durch Vergleich der Koeffizienten von und in (3).
Analog für F2(q,P,t), F3(p,Q,t), F4(p,P,t).

$\boxed{H33}$

Analog für andere Tr.-Klassen: (29.5), mit Einsteinscher Summenkonvention:

$$\underbrace{-p_k\dot q_k + P_k\dot Q_k + \frac{dF}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t}}_{=0} \quad (1a) \qquad = \underbrace{\tilde H(Q,P,t) - H(q,p,t)}_{=0} - \frac{\partial F}{\partial t} \quad (1b)$$

gilt für alle Klassen von F

Erzeugende F	(1a) $=0$ $\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial t}$	Gleichungen benötigt für	Koeff.-Vergleich
$F=F_1(q,Q,t)$	$-p_k\dot q_k + P_k\dot Q_k + \frac{\partial F_1}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k}\dot Q_k$	$p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}$ (2a), $P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}$ (2b)	$\dot q_k,\ \dot Q_k$
$F=F_2(q,P,t)$ $-Q_kP_k$	$-p_k\dot q_k + \cancel{P_k\dot Q_k} + \frac{\partial F_2}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial F_2}{\partial P_k}\dot P_k$ $-\cancel{\dot Q_k P_k} - Q_k\dot P_k$	$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}$ (3a), $Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}$ (3b)	$\dot q_k,\ \dot P_k$
$F=F_3(p,Q,t)$ $+q_kp_k$	$-\cancel{p_k\dot q_k} + P_k\dot Q_k + \frac{\partial F_3}{\partial p_k}\dot p_k + \frac{\partial F_3}{\partial Q_k}\dot Q_k$ $+\cancel{\dot q_k p_k} + q_k\dot p_k$	$q_k = -\frac{\partial F_3}{\partial p_k}$ (4a), $P_k = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_k}$ (4b)	$\dot p_k,\ \dot Q_k$
$F=F_4(p,P,t)$ $+q_kp_k - Q_kP_k$	$-\cancel{p_k\dot q_k} + \cancel{P_k\dot Q_k} + \frac{\partial F_4}{\partial p_k}\dot p_k + \frac{\partial F_4}{\partial P_k}\dot P_k$ $+\cancel{\dot q_k p_k} + q_k\dot p_k - \cancel{\dot Q_k P_k} - Q_k\dot P_k$	$q_k = -\frac{\partial F_4}{\partial p_k}$ (5a), $Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k}$ (5b)	$\dot p_k,\ \dot P_k$

$\boxed{H34}$

Bemerkung: Die Definitionen F2, F3 und F4 können als Legendre-Transformationen von F1 aufgefasst werden, und umgekehrt.

Beispiel in Klasse F2:
Betrachte erzeugende der Form:

$$F_2(q,P,t) = \sum_{j=1}^{f} f_j(q,t)\,P_j \qquad (1)$$

(33-3a) $$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial f_j}{\partial q_k} P_j \qquad (2)$$

(33.3b) $$Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = f_k(q,t) \qquad (3)$$

(3) umfasst alle bekannte Koordinatentransformationen der Lagrangeschen Mechanik (sogenannte Punkttransformationen)

Spezielle Wahl von f: $f_j = q_j$

$$F_2(q,P,t) \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{f} q_j P_j \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} p_k &\overset{(2)}{=} P_k \\ Q_k &\overset{(3)}{=} q_k \end{aligned}\right\} \text{identische Transformation} \qquad (5)$$

Satz: Eine gegebene Transformation

$$Q = Q(q,p,t) \quad , \quad P = P(q,p,t) \tag{1}$$

ist genau dann kanonisch, wenn folgende Poisson-Klammer-Relationen erfüllt sind,

$$\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij} \tag{2}$$

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0 \tag{3}$$

wobei die Poisson-Klammern bezüglich q,p zu berechnen sind:

$$\{A, B\}_{q,p} = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} \right) \tag{4}$$

Beweis: Übungsaufgabe

Bemerkung: dieser Satz hat wichtige Anwendungen in der Quantenmechanik, wegen

$$\{\ ,\ \} \to \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]$$