

a) In der Regel wird ein Gebiet im Phasenraum im Laufe der Zeit stark deformiert.

Beispiel: Ebenes mathematisches Pendel

Lagrange: $L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m g l [\cos \varphi - 1]$

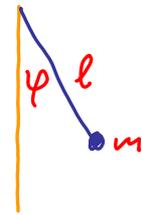
Kanonischer Impuls: $p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \dot{\varphi}$

Hamilton: $H = \frac{p_{\varphi}^2}{2 m l^2} - m g l [\cos \varphi - 1]$

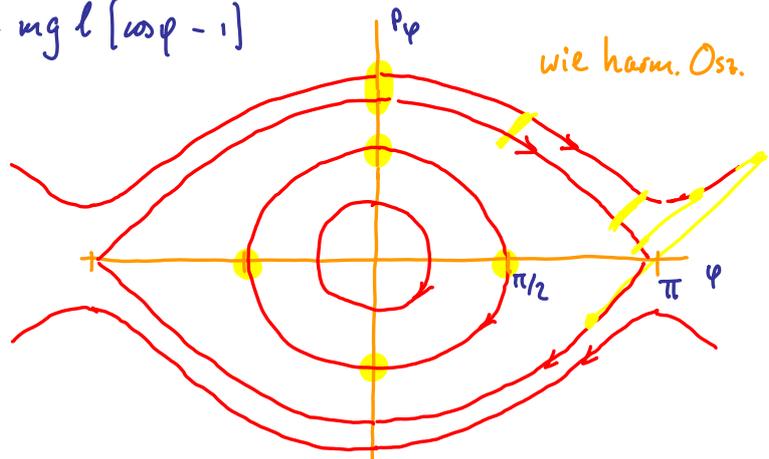
Ham. Bew.Gl:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} = \frac{p_{\varphi}}{m l^2}$$

$$\dot{p}_{\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -m g l \sin \varphi$$

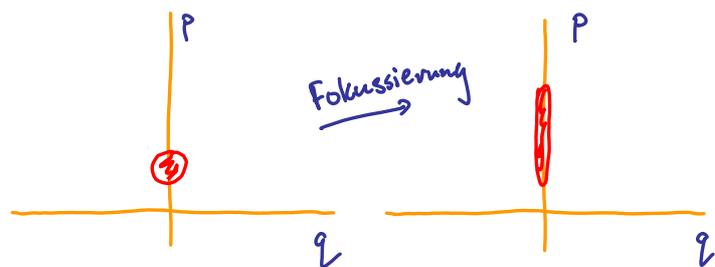


wie harm. Osz.



b) Geladenes Teilchen in äußerem Magnetfeld ist ein kanonisches System.

Anwendung: Fokussierung eines Teilchenstrahls im Beschleuniger
- Um bessere Ortsfokussierung des Teilchenstrahls zu erreichen, ist, laut Liouvilleschem Satz, eine breitere Impulsverteilung nötig!



Allgemein gilt:

Die Dynamik im 2f-dimensionalen Phasenraum ist eingeschränkt durch folgende Eigenschaften:

- Trajektorien kreuzen sich nicht
- Erhaltungsgrößen (schränken Dynamik auf bestimmte Mannigfaltigkeiten ein mit

$$I = I(q, p) = \text{const.}$$

- Liouvillescher Satz gilt.

Kanonische Transformationen

$$\bar{q} = q + \epsilon q(t) \Rightarrow \dot{\bar{q}} = \dot{q} + \epsilon \dot{q}(t) \quad \boxed{H27}$$

Erinnerung: Hamiltonsches Extremalprinzip: Die Wirkung ist bei vorgegebenen Randbedingungen stationär für die physikalischen Trajektorien:

$$\delta S[q] = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \Leftrightarrow (Lqz) \quad \text{für } \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (1)$$

Dieses Extremalprinzip gilt auch für Variationen im Phasenraum, der ja größer ist als der Koordinatenraum!

Satz ("modifiziertes Hamiltonsches Prinzip"): $S[q, p] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) \right] dt \quad (2)$

ist bei vorgegebenen Randbedingungen stationär für physikalischen Trajektorien im Phasenraum:

$$\delta S[q, p] = 0, \text{ mit } \left\{ \begin{array}{l} \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (3a) \\ \delta p(t_1) = \delta p(t_2) = 0 \quad (3b) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Hamiltonschen} \\ \text{Bewegungsgleichungen} \end{array} \quad (3)$$

Beweis:
Euler-Lagrange-Gl.
angewandt auf

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial g}{\partial q_k} \xrightarrow{(2)} \frac{d}{dt} p_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (4a) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial p_k} = \frac{\partial g}{\partial p_k} \Rightarrow 0 = \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (4b) \end{array} \right\} = (Hg) \checkmark$$

Bemerkung: Da $G(q, p, \dot{q}, t)$ de facto NICHT von \dot{p} abhängt, ist Bedingung (27.3b) nicht für Herleitung des Satzes erforderlich. $\boxed{H28}$

(27.3b) wäre nötig für part. Integr. bei: $\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{p}} \right) \delta \dot{p} = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial p} \right) \delta p + \frac{\partial g}{\partial p} \delta p \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (1)$

\uparrow ist aber durch $\dot{p} = 0$ für (27.2)

Also ist Bedingung (27.3a) ausreichend, und gilt das modifizierte Hamiltonsche Prinzip unter genau denselben Voraussetzungen wie das ursprüngliche Hamiltonsche Prinzip für $L(q, \dot{q}, t)$.

Dennoch schränken wir vortan Betrachtung ein auf Bedingung, dass (27.3a) und (27.3b) gelten. (Grund: siehe unten).

Betrachte nun Transformationen von alten zu neuen Variablen,

$$\left. \begin{array}{l} q_1, \dots, q_f \\ p_1, \dots, p_f \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} Q_k = Q_k(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) \\ P_k = P_k(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) \end{array} \quad (2)$$

Ziel: neuen Bewegungsgleichungen sollen einfacher als alten sein!

Definition: Variablentransformation d. Form (2) heisst "kanonisch", wenn sie d. Form der kanonischen Bewegungsgleichungen erhält, d.h., wenn ein $\tilde{H}(Q, P, t)$ existiert, für das gilt:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} \rightarrow \dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \quad (3)$$

H 29

Bemerkung: (28.2) erlaubt Mischung v. Koordinaten und Impulsen, d.h. Klasse v. Transf. ist größer als i.d. Lagrangeschen Formulierung, wo nur Transf. im Koordinatenraum vorgesehen sind:

$$Q_k = Q_k(q_1, \dots, q_f, t)$$

Allgemeine Konstruktion einer kanonischen Transformation:

Da Hamilton-Gleichungen äquivalent zum modifizierten Ham. Variationsprinzip sind, muss gelten:

p,q kanonisch: $\Leftrightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} [\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q, p, t)] = 0$, mit $\delta q^{(1)} = \delta q^{(2)} = 0$
 $\delta p^{(1)} = \delta p^{(2)} = 0$ (3)

P,Q kanonisch: $\Leftrightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} [\sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q, P, t)] = 0$, mit $\delta Q^{(1)} = \delta Q^{(2)} = 0$
 $\delta P^{(1)} = \delta P^{(2)} = 0$ (4)

(3) und (4) sind gleichzeitig erfüllt, falls

beliebige Funktion mit stetigen 2.ten Ableitungen

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t) = \sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q_k, P_k, t) + \frac{d}{dt} F(q, p, Q, P, t) \quad (5)$$

denn Zusatzterm

liefert: $\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(q + \delta q, p + \delta p, Q + \delta Q, P + \delta P) = \delta (F(q, p, Q, P) \Big|_{t_1}^{t_2} - F(q, p, Q, P) \Big|_{t_1}^{t_2}) = 0$ (6)

H 30

Bemerkung: Da nur zwei der vier Variablensätze q, p, Q, P unabhängig sind, gibt es vier verschiedene Klassen von "Erzeugenden" F. (Je nach Problemstellung ist eine nützlicher als die anderen.)

$F = F_1(q, Q, t)$ (1)

$F = F_2(q, P, t) - \sum_k Q_k P_k$ (2)

$F = F_3(p, Q, t) + \sum_k q_k p_k$ (3)

$F = F_4(p, P, t) + \sum_k q_k p_k - \sum Q_k P_k$ (4)

nächstes Mal

Betrachte zunächst F1.

Die Form von F1 bestimmt Form der Transformation, wie folgt:

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) \stackrel{(29.5)}{=} \sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q, P, t) + \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t) + \sum_k \left[\frac{\partial F_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \right] + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (5)$$

(5) ist identisch erfüllt, falls:

$p_k(q, Q, t) \stackrel{(7)}{=} \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_k}$ (7)

$P_k(q, Q, t) \stackrel{(8)}{=} - \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_k}$ (8)

(7), (8) auflösen nach: $q = q(Q, P, t)$ (9a)
 $p = p(Q, P, t)$ (9b)

$\tilde{H}(Q, P, t) \stackrel{(9)}{=} \left[H(q, p, t) + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t} \right]_{q = q(Q, P, t), p = p(Q, P, t)}$ (10)

Beispiel: Harmonischer Oszillator

H31

Hamilton-Funktion:

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (1)$$

Ansatz für F1: Wähle

$$F_1(q, Q, t) = \frac{\omega}{2} m q^2 \cot Q \quad (2)$$

(3.7):

$$P = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m \omega q \cot Q \quad (3)$$

(3.9):

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{\frac{1}{2} m \omega q^2}{\sin^2 Q} \quad (4)$$

(3), (4) auflösen, nach $q=q(Q, P, t)$, $p=p(Q, P, t)$:

$$q(Q, P) \stackrel{(4)}{=} \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \quad (5)$$

(5) in (3):

$$p(Q, P) = \sqrt{m\omega} \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \frac{\omega Q}{\sin Q} = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \quad (6)$$

(5), (6) in (1)

$$\tilde{H}(Q, P, t) = \frac{1}{2m} (\sqrt{2m\omega P} \cos Q)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \right)^2 \quad (7)$$

$$\tilde{H}(Q, P, t) = \omega P \Rightarrow Q \text{ ist zyklisch! } \textcircled{\text{smiley}} \quad (8)$$

Kanonische Gl.:

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{const.} = c \quad (1)$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q(t) = \omega t + \alpha \quad (2)$$

Eingesetzt in q, p :

$$q(t) \stackrel{(3.5)}{=} \sqrt{\frac{2c}{m\omega}} \sin(\omega t + \alpha) \quad (3)$$

$$p(t) \stackrel{(3.6)}{=} \sqrt{2m\omega c} \cos(\omega t + \alpha) \quad (4)$$

korrekte,
bekannte
Lösung!

WOW!

Bemerkungen:

Konstruktion einer zyklischen Variable erfordert Mischung von Ort- und Impulsvariablen.
Lohn der Mühen: neue Hamilton-Funktion ist extrem einfach!

Grundidee hinter dieser Konstruktion:

Wenn F_1 von q, Q, t abhängt, brauchen wir Gleichungen, für p und P [siehe (2) und (3)].

Diese bekommen wir, durch Vergleich der Koeffizienten von \dot{q} und \dot{Q} in (3).

Analog für $F_2(q, P, t)$, $F_3(p, Q, t)$, $F_4(p, P, t)$.

Analog für andere Tr.-Klassen:
(29.5), mit Einsteinscher
Summenkonvention:

$$\underbrace{-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{dF}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t}}_{=0} \quad (1a) = \underbrace{\tilde{H}(Q,P,t) - H(q,p,t) - \frac{\partial F}{\partial t}}_{=0} \quad (1b) \quad \boxed{H33}$$

gilt für alle Klassen von F

Erzeugende F	(1a) = 0	Gleichungen benötigt für	Koeff.-Vergleich
$F = F_1(q, Q, t)$	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{\partial F_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k$	$p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}, P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}$ (2a) (2b)	\dot{q}_k, \dot{Q}_k
$F = F_2(q, P, t) - Q_k P_k$	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \dot{P}_k - \dot{Q}_k P_k - Q_k \dot{P}_k$	$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}, Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}$ (3a) (3b)	\dot{q}_k, \dot{P}_k
$F = F_3(p, Q, t) + q_k P_k$	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{\partial F_3}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial F_3}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \dot{q}_k P_k + q_k \dot{P}_k$	$q_k = -\frac{\partial F_3}{\partial p_k}, P_k = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_k}$ (4a) (4b)	\dot{p}_k, \dot{Q}_k
$F = F_4(p, P, t) + q_k P_k - Q_k P_k$	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{\partial F_4}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial F_4}{\partial P_k} \dot{P}_k + \dot{q}_k P_k + q_k \dot{P}_k - \dot{Q}_k P_k - Q_k \dot{P}_k$	$q_k = -\frac{\partial F_4}{\partial p_k}, Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k}$ (5a) (5b)	\dot{p}_k, \dot{P}_k

Bemerkung: Die Definitionen F2, F3 und F4 können als Legendre-Transformationen von F1 aufgefasst werden, und umgekehrt.

H34

Beispiel in Klasse F2:
Betrachte erzeugende
der Form:

(3.3a)

$$F_2(q, P, t) = \sum_{j=1}^f f_j(q, t) P_j \quad (1)$$

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial f_j}{\partial q_k} P_j \quad (2)$$

(3.3b)

$$Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = f_k(q, t) \quad (3)$$

(3) umfasst alle bekannte Koordinatentransformationen der Lagrangeschen Mechanik (sogenannte Punkttransformationen)

Spezielle Wahl von f:

$$f_j = q_j$$

$$F_2(q, P, t) \stackrel{(1)}{=} \sum_{j=1}^f q_j P_j \quad (4)$$

$$p_k \stackrel{(2)}{=} P_k$$

$$Q_k \stackrel{(3)}{=} q_k$$

} identische Transformation (5)

Satz: Eine gegebene Transformation

H35

$$Q = Q(q, p, t) \quad , \quad P = P(q, p, t) \quad (1)$$

ist genau dann kanonisch, wenn folgende Poisson-Klammer-Relationen erfüllt sind,

$$\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij} \quad (2)$$

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0 \quad (3)$$

wobei die Poisson-Klammern bezüglich q, p zu berechnen sind:

$$\{A, B\}_{q,p} = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} \right) \quad (4)$$

Beweis: Übungsaufgabe

Bemerkung: dieser Satz hat wichtige Anwendungen in der Quantenmechanik, wegen

$$\{ , \} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [,]$$