Zusammenfassung: kanonische Transformationen

Definition: Variablentransformation d. Form (2) heisst "kanonisch", wenn sie d. Form der kanonischen Bewegungsgleichungen erhält, d.h., wenn ein $\tilde H(Q,P,t)$ existiert, für das gilt:

$$\dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \longrightarrow \quad \dot Q_k = \frac{\partial \tilde H}{\partial P_k}, \quad \dot P_k = -\frac{\partial \tilde H}{\partial Q_k} \tag{1}$$

Allgemeines Konstruktionsprinzip einer kanonischen Transformation: wähle "erzeugende F" und konstruiere neue Hamilton-Funktion gemäß:

$$\sum_k p_k \dot q_k - H(q_k, p_k, t) = \sum_k P_k \dot Q_k - \tilde H(Q_k, P_k, t) + \frac{d}{dt} F(q, p, Q, P, t) \tag{2}$$

Bemerkung: Da nur zwei der vier Variablensätze q, p, Q, P unabhängig sind, gibt es vier verschiedene Klassen von "Erzeugenden" F. (Je nach Problemstellung ist eine nützlicher als die anderen.)

$$F = F_1(q, Q, t) \tag{3}$$

$$F = F_2(q, P, t) - \sum_k Q_k P_k \tag{4}$$

$$F = F_3(p, Q, t) + \sum_k q_k p_k \tag{5}$$

$$F = F_4(p, P, t) + \sum_k q_k p_k - \sum_k Q_k P_k \tag{6}$$

Analog für andere Tr.-Klassen: (29.5), mit Einsteinscher Summenkonvention:

$$\underbrace{-p_k \dot q_k + P_k \dot Q_k + \frac{dF}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t}}_{=0} \ \text{(1a)} = \underbrace{\tilde H(Q,P,t) - H(q,p,t) - \frac{\partial F}{\partial t}}_{=0} \ \text{(1b)}$$

gilt für alle Klassen von F

Erzeugende F	(1a) $= 0$	Gleichungen benötigt für	Koeff.-Vergleich
$F = F_1(q,Q,t)$	$-p_k\dot q_k + P_k\dot Q_k + \frac{\partial F_1}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k}\dot Q_k$	$p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}$ (2a), $P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}$ (2b)	$\dot q_k, \dot Q_k$
$F = F_2(q,P,t) - Q_k P_k$	$-p_k\dot q_k + \cancel{P_k\dot Q_k} + \frac{\partial F_2}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial F_2}{\partial P}\dot P_k - \cancel{\dot Q_k P_k} - Q_k\dot P_k$	$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}$ (3a), $Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P}$ (3b)	$\dot q_k, \dot P_k$
$F = F_3(p,Q,t) + q_k p_k$	$-\cancel{p_k\dot q_k} + P_k\dot Q_k + \frac{\partial F_3}{\partial p_k}\dot p_k + \frac{\partial F_3}{\partial Q_k}\dot Q_k + \cancel{\dot q_k p_k} + q_k\dot p_k$	$q_k = -\frac{\partial F_3}{\partial p_k}$ (4a), $P_k = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_k}$ (4b)	$\dot p_k, \dot Q_k$
$F = F_4(p,P,t) + q_k p_k - Q_k P_k$	$-\cancel{p_k\dot q_k} + \cancel{P_k\dot Q_k} + \frac{\partial F_4}{\partial p_k}\dot p_k + \frac{\partial F_4}{\partial P_k}\dot P_k + \cancel{\dot q_k p_k} + q_k\dot p_k - \cancel{\dot Q_k P_k} - Q_k\dot P_k$	$q_k = -\frac{\partial F_4}{\partial p_k}$ (5a), $Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k}$ (5b)	$\dot p_k, \dot P_k$

Hamilton-Jacobi-Theorie

H38

Bewegungsgleichungen werden einfacher, wenn die neuen Koordinaten zyklisch sind. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn eine zeitabhängige kanonische Transformation existiert,

$$\{q, p, H(q,p,t)\} \qquad (1)$$

so dass die neue Hamilton-Funktion verschwindet:

$$\text{Falls } \tilde{H}(Q,P,t) = 0, \text{ folgt } \dot{Q}_K \overset{(HG)}{=} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_K}, \qquad \dot{P}_K \overset{(HG)}{=} -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_K} \qquad (2)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$Q_K(q,p,t) = \qquad , \qquad P_K(q,p,t) = \qquad (3)$$

Invertieren von (3) liefert gesuchte Lösung der Bewegungsgl.:

$$q_K = q_K(Q,P,t) \qquad , \qquad p_K = p_K(Q,P,t) \qquad (4)$$

α_K, β_K spielen die Rolle von Intergrationskonstanten, lassen sich durch Angabe v, Anfangsbedingungen bestimmen:

$$\beta_K \overset{(2)}{=} Q(q \;, p \;, t \;) \qquad , \qquad \alpha_K \overset{(2)}{=} P_K(q \;, p \;, t \;) \qquad (5)$$

Satz: (1) Die Lösung der kanonischen Bewegungsgl. ist äquivalent dazu, eine allgemeine Lösung

H39

$\tilde{S} =$ der partiellen Differentialgleichung (DGL) ("Hamilton-Jacobi-Gleichung")

$$\boxed{H(q_1, \ldots, q_f, p_1 \qquad , \ldots, p_f \qquad , t) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0} \qquad (1)$$

zu finden, mit f unabhängigen "Integrationskonstanten" (alle zeitunabhängig)

(2) Insbesondere gilt dann: $P_K = \qquad , \qquad Q_K =$ (2)

und durch Auflösen nach q folgt: $q_K =$ (3)

Beweis (1): Eine solche Lösung sei gegeben; betrachte sie als Erzeugende vom Typ F2:

$$F_2(q, P, t) \qquad (4)$$

Die neue Hamilton-Funktion ist dann

$$\tilde{H}(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \qquad (5)$$

Beweis (2): folgt trivial, analog zu (38.3-5), mit $Q_K \overset{(35.3b)}{=} \frac{\partial F_2}{\partial P_K} =$ (6)

Bemerkung: Da in der Hamilton-Jacobi-Theorie [Gl. (39.1,2)] nur Ableitungen der Erzeugenden vorkommen, ist sie nur bis auf eine Additive Konstante bestimmt. **H40**

Per Konvention wird diese so gewählt, dass

$$\tilde{S}(q_0, \alpha, t_0) = \qquad (0)$$

Satz: Wenn die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, vereinfacht die Wahl (eine der α_K sei)

$$\tilde{S}(q, \alpha, t) = \qquad (1)$$

"verkürzte Wirkung"

für die Erzeugende die Hamilton-Jacobi-Gl. zu

"verkürzte Hamilton-Jacobi-Gl."

$$\boxed{H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_f}\right) = E} \qquad (2)$$

laut Annahme

Beweis:

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1 \quad , \dots , p_f \quad , t) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \overset{(39.1)}{=} 0 \qquad (3)$$

zeitunabhängig

Bemerkung: Der Ansatz (1) funktioniert nur, weil H NICHT explizit zeitabhängig ist.

Wäre bräuchten wir eine Zeitabhängigkeit in (4)

Beispiel: Harmonischer Oszillator **H41**

Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \qquad (1)$$

Erzeugende:

$$\tilde{S}(q, \alpha = E, t) \overset{(40.1)}{=} \qquad (2)$$

Verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung (40.2) für $W = W(q, E)$

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) \overset{(40.2)}{=} E: \qquad \frac{1}{2m}\left[\qquad \right]^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \overset{(1)}{=} E \qquad (3)$$

Diff.Gl. für $W(q, E)$

$$\frac{\partial}{\partial q} W(q, E) \overset{(3)}{=} \qquad (4)$$

Integriert: $\int_{q_0}^{q} dq' \, (4):$

$$= \int_{q_0}^{q} dq' \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q'^2} \qquad (5)$$

H42

Explizite Lösung des Integrals nicht nötig, denn

$$p \overset{(35.3a)}{=} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q} = \qquad (1)$$

(35.3b) oder (39.2)

$$Q = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} \qquad (2)$$

$$\overset{(41.5)}{=} \qquad (3)$$

$$\overset{\text{Bronstein}}{=} -t + \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{m\omega q}{\sqrt{2mE}}\right) \qquad (4)$$

Auflösen nach q(t) und p(t) liefert bekannte Lösung:

$$q(t) = \qquad (5)$$

$$p(t) \overset{(1,5)}{=} \sqrt{2mE}\,\sqrt{1-\sin^2\omega(t+\beta)} = \sqrt{2mE}\,\cos\omega(t+\beta) \qquad (6)$$

Anfangsbedingungen bei t=0 legen α, β fest:

$$E \overset{(41.1)}{=} \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2 \; ; \quad \beta \overset{(5,6)}{=} \arctan\left[m\omega\frac{q_0}{p_0}\right] \qquad (7)$$

$\square$

H43

Physikalische Interpretation der Erzeugenden:

Satz: Die Lösung $\tilde{S}(q,\alpha,t)$ der Hamilton-Jacobi-Gl. ist gerade die Wirkung entlang der physikalischen Trajektorie.

zeitunabhängig!

Beweis: Betrachte

$$\frac{d}{dt}\tilde{S}(q,\alpha,t) = \qquad (1)$$

Hamilton-Jacobi-Gl:

$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

$$= \qquad (2)$$

(2) = Legendre-Transf. der Hamilton-Funktion:

$$= \qquad (3)$$

(1) integriert:

$$\boxed{\tilde{S}(q,\alpha,t) = \qquad } \qquad (4)$$

Folgerung: Das Wirkungsintegral läßt sich als Erzeugende für gerade die kanonische Transf. interpretieren, die die Hamilton-Funktion "trivial" macht.

Bemerkung: Um (4) zu verifizieren, muss Lösung der Bewegungsgleichung bereits bekannt sein.

Beispiel: (43.4) für Harmonischen Oszillator:

H44

$$\tilde{S}(q,E,t) \overset{(41.2)}{=} W(q,E) - E(t-t_0) \quad (1)$$

$$\overset{(41.5)}{=} \int_{q_0}^{q} dq' \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q'^2} + W(q_0,E) - E(t-t_0) \quad (2)$$

Transformation der Integrationsvariablen:

$$= \quad (3)$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt' \; 2E\left[\cos^2[\omega(t+\beta)] - \tfrac{1}{2}\right] \quad (4)$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (5)$$

$$\overset{(42.5,6)}{=} \quad (6)$$

$$\cos^2 - \sin^2 = 2\left(\cos^2 - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$= 2E\left\{\cos^2[\omega(t+\beta)] - \tfrac{1}{2}\right\} \quad (7)$$

= Integrand v. (4), konsistent mit (43.4)

Zusammenfassung: Hamilton-Jacobi-Theorie

H45

Anwendbar für: $H = H(q,p,t)$ | $H = H(q,p)$ (1)

Ziel: finde kanonische Transformation, so dass folgende Größen automatisch erhalten sind: alle , | alle (2)

Formale Forderung: $\tilde{H}(P,Q,t) =$ | $\tilde{H}(P,Q) =$ zugleich in $\underline{\text{allen}}$ Q_i (3)

Bewegungsgleichungen für neue Variablen:

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = \quad , \qquad \dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = \quad (4a)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \qquad \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \quad (4b)$$

Lösungen für neue Variablen: $Q_k =$, $P_k =$ | $Q_k =$, $P_k =$ (5)

Erzeugende, die gewünschte Transf. liefert: $S =$ | $W =$ (6)

Hamiltonsche Wirkungsfunktion | Charakteristische Hamilton-Funktion (verkürzte Wirkung)

H46

Erzeugende wird bestimmt durch die partielle Hamilton-Jacobi-Gleichung (HJG): $H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0\,,\qquad H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)-\alpha_1=0$ (7)

[bedeutet: ersetze p_k durch $\partial S/\partial q_k$]

Die vollständige Lösung der HJG enthält n Integrationskonstanten, die gleich den erhaltenen Impulsen gesetzt werden können: $\gamma_i := P_i = \alpha_i = \text{const.}$ (8)

Vollständigen Lösungen der HJG sind also Funktionen der neuen Impulse: $S=\qquad,\qquad W=$ (9)

Eine Hälfte der Transformationsgleichungen ist automatisch erfülllt (da genutzt in Konstruktion der HJG): $p_k(q,\alpha,t)=\qquad,\qquad p_k(q,\alpha)=$ (10)

Die andere Hälte der Transformationsgleichungen, $Q_k(q,\alpha,t)=\qquad,\qquad Q_k(q,\alpha,t)=$ (11)

lässt sich auflösen nach den alten Koordinaten, und liefert somit die gewünschte Lösung der Bewegungsgl.: $q=$ (12)

Anfangsbedingungen für Koordinaten und Impulse, eingesetzt in (10) und (11), legen die Konstanten fest: $\alpha=\qquad,\qquad \beta=$ (13)

Falls H nicht von der Zeit abhängt, gilt: $S(q,\alpha,t)=W(q,\alpha)-\alpha_1 t$ (14)

Separation der Variablen in Hamilton-Jacobi-Gleichung

H47

Wir wissen bereits: falls H nicht von t abhängt, separiert die Erzeugende in zwei Beiträge, linear in t bzw. unabhängig von t:

Charakteristische Hamilton-Funktion

$$\tilde{S}(q,\alpha,t) = -\alpha_1 t + W(q,\alpha) \qquad (1)$$

denn dann reproduziert die HJG die t-unabhängigkeit von H:

$$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \quad\Rightarrow \qquad (2)$$

Analog gilt:
falls H ausserdem zyklisch in einer Koordinate ist, z.B. in q_f, $H=(q_1\ldots q_{f-1},p_1\ldots p_f)$
kann auch W(q,P) in zwei Beiträge separiert werden, linear in q_f bzw. unabhängig von q_f

KEINE SUMME

$$W(q,\alpha) = \qquad (3)$$

Grund: dann reproduziert (3) die Tatsache, dass der zu q_f konjugierte Impuls erhalten ist:

$$P_f \overset{(35.3a)}{=} \frac{\partial W}{\partial q_f} = \qquad (4)$$

HJG (2) vereinfacht sich zu:

$$H(q_1,\ldots,q_{f-1},\qquad) = \alpha_1 \qquad (5)$$

(Für allgemeine Diskussion, unter welchen Umständen HJ-Gl. separierbar ist, siehe Goldstein, Kapitel 10.4.)

Beispiel: Zentralkraft-Problem: V = V(r)

Wähle Polarkoordinaten in der Bahnebene: (z = 0 = konst.)

Zwischenrechnung: Finde Hamilton-Funktion H = H(q,p):

Kinetische Energie:
[Blatt 6, Beispielaufgabe (1e)']

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot\rho^2 + \rho^2 \dot\varphi^2 + \dot z^2 \right] \quad (1)$$

Kanonische Impulse:

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot\rho} = m \dot\rho \,, \quad \Rightarrow \quad \dot\rho = \frac{p_\rho}{m} \quad (2a)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m\rho^2 \dot\varphi \,, \quad \Rightarrow \quad \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \quad (2b)$$

Hamilton-Funktion:

$H(q,p) = \sum_k p_k \dot q_k - L$

$$H = p_\rho \dot\rho + p_\varphi \dot\varphi - L \quad (3)$$

$$= p_\rho \frac{p_\rho}{m} + p_\varphi \frac{p_\varphi}{m\rho^2} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{p_\varphi}{m}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{p_\varphi}{m\rho^2}\right)^2 - V \right] \quad (4)$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}\left[p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} \right] + V(\rho)} \quad (5)$$

Notationskonvention: $q_1 =$, $\alpha_1 =$, $q_2 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_1 =$, (1)

Charakteristische Hamilton-Funktion laut (47.3):

$$W(q,\alpha) \overset{(47.3)}{=} \alpha_f q_f + W'(q_1, \dots, q_{f-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_f) \,, \quad (2)$$

Kurznotation

Hier: $W(\rho, \varphi, \alpha_1, \alpha_\varphi) =$ (3)

Hamilton-Jacobi-Gl. laut (47.5):

bedeutet: ersetze durch

$$H\left(q_1, \dots, q_{f-1}, \frac{\partial W'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W'}{\partial q_{f-1}}, \alpha_f\right) = \alpha_1 \quad (4)$$

Hier:

$$\frac{1}{2m}\left[\qquad + \frac{\qquad}{\rho^2} \right] + V(\rho) = \alpha_1 \quad (5)$$

(5) aufgelöst nach $\frac{\partial W'}{\partial \rho}$:

$$\frac{\partial W'}{\partial \rho} = \quad (6)$$

Volle Erzeugende, (49.3):

W =

$$\boxed{W = \alpha_\varphi \varphi \pm \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \sqrt{2m\left[\alpha_1 - V(\rho')\right] - \alpha_\varphi^2/\rho'^2}} \tag{1}$$

H50

Transformationsgl.:

$$\delta_{k1} t + \beta_k = Q_k(q,\alpha,t) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} \tag{2}$$

(2) mit $k=1$:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \frac{\pm m}{\sqrt{2m\left[\alpha_1 - V(\rho')\right] - \alpha_\varphi^2/\rho'^2}} \tag{3}$$

(3) gibt Radius als Funktion der Zeit , konsistent mit ZP7.3 !!

(2) mit $k=2$:

$$\frac{\partial W}{\alpha_\varphi} = \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \frac{\mp \alpha_\varphi/\rho'^2}{\sqrt{2m\left[\alpha_1 - V(\rho')\right] - \alpha_\varphi^2/\rho'^2}} \tag{4}$$

(4) gibt Winkel als Funktion des Radius , liefert also Bahnkurve, konsistent mit ZP8.2 !!

HJ-Formalismus ist sehr mächtig - zentrale Ergebnisse folgen mit sehr wenig Aufwand!

Für analoge Behandlung der Zentralkraft in Kugelkoordinaten: siehe Goldstein.