Zusammenfassung: kanonische Transformationen

V25 – 08.07.07 H36

Definition: Variablentransformation d. Form (2) heisst "kanonisch", wenn sie d. Form der kanonischen Bewegungsgleichungen erhält, d.h., wenn ein $\tilde H(Q,P,t)$ existiert, für das gilt:

$$\dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \longrightarrow \quad \dot Q_k = \frac{\partial \tilde H}{\partial P_k}, \quad \dot P_k = -\frac{\partial \tilde H}{\partial Q_k} \qquad (1)$$

Allgemeines Konstruktionsprinzip einer kanonischen Transformation: wähle "erzeugende F" und konstruiere neue Hamilton-Funktion gemäß:

$$\sum_k p_k \dot q_k - H(q_k, p_k, t) = \sum_k P_k \dot Q_k - \tilde H(Q_k, P_k, t) + \frac{d}{dt} F(q, p, Q, P, t) \qquad (2)$$

Bemerkung: Da nur zwei der vier Variablensätze q, p, Q, P unabhängig sind, gibt es vier verschiedene Klassen von "Erzeugenden" F. (Je nach Problemstellung ist eine nützlicher als die anderen.)

$$F = F_1(q, Q, t) \qquad (3)$$

$$F = F_2(q, P, t) - \sum_k Q_k P_k \qquad (4)$$

$$F = F_3(p, Q, t) + \sum_k q_k p_k \qquad (5)$$

$$F = F_4(p, P, t) + \sum_k q_k p_k - \sum_k Q_k P_k \qquad (6)$$

H37

Analog für andere Tr.-Klassen: (29.5), mit Einsteinscher Summenkonvention:

$$\underbrace{-p_k \dot q_k + P_k \dot Q_k + \frac{dF}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t}}_{=0 \ \ (1a)} = \underbrace{\tilde H(Q,P,t) - H(q,p,t) - \frac{\partial F}{\partial t}}_{=0 \ \ (1b)}$$

gilt für alle Klassen von F

Erzeugende F	(1a) $= 0$	Gleichungen benötigt für	Koeff.-Vergleich
$F = F_1(q,Q,t)$	$-p_k \dot q_k + P_k \dot Q_k + \frac{\partial F_1}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k}\dot Q_k$	$p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}$ (2a), $P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}$ (2b)	$\dot q_k, \dot Q_k$
$F = F_2(q,P,t) - Q_k P_k$	$-p_k \dot q_k + \cancel{P_k \dot Q_k} + \frac{\partial F_2}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial F_2}{\partial P}\dot P_k - \cancel{\dot Q_k P_k} - Q_k \dot P_k$	$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}$ (3a), $Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P}$ (3b)	$\dot q_k, \dot P_k$
$F = F_3(p,Q,t) + q_k p_k$	$-\cancel{p_k \dot q_k} + P_k \dot Q_k + \frac{\partial F_3}{\partial p_k}\dot p_k + \frac{\partial F_3}{\partial Q_k}\dot Q_k + \cancel{\dot q_k p_k} + q_k \dot p_k$	$q_k = -\frac{\partial F_3}{\partial p_k}$ (4a), $P_k = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_k}$ (4b)	$\dot p_k, \dot Q_k$
$F = F_4(p,P,t) + q_k p_k - Q_k P_k$	$-\cancel{p_k \dot q_k} + \cancel{P_k \dot Q_k} + \frac{\partial F_4}{\partial p_k}\dot p_k + \frac{\partial F_4}{\partial P_k}\dot P_k + \cancel{\dot q_k p_k} + q_k \dot p_k - \cancel{\dot Q_k P_k} - Q_k \dot P_k$	$q_k = -\frac{\partial F_4}{\partial p_k}$ (5a), $Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k}$ (5b)	$\dot p_k, \dot P_k$

Hamilton-Jacobi-Theorie

H38

Bewegungsgleichungen werden einfacher, wenn die neuen Koordinaten zyklisch sind. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn eine zeitabhängige kanonische Transformation existiert,

$$\{q, p, H(q,p,t)\} \longrightarrow \{Q, P, \tilde{H}(Q,P,t) \overset{(33.16)}{=} H(q,p) + \frac{\partial F}{\partial t} \overset{!}{=} 0\} \quad (1)$$

Forderung an F!

so dass die neue Hamilton-Funktion verschwindet:

Falls $\tilde{H}(Q,P,t) = 0$, folgt $\dot{Q}_K \overset{(HG)}{=} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_K} = 0$, $\dot{P}_K \overset{(HG)}{=} -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_K} = 0$ (2)

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} Q_K(q,p,t) = \beta_K = \text{konst}, & P_K(q,p,t) = \alpha_K = \text{konst.} \quad (3) \\ q_K = q_K(Q,P,t) = q_K(\beta,\alpha,t), & p_K = p_K(Q,P,t) = p_K(\beta,\alpha,t) \quad (4) \end{array}}$$

Invertieren von (3) liefert gesuchte Lösung der Bewegungsgl.:

α_K, β_K spielen die Rolle von Intergrationskonstanten, lassen sich durch Angabe v, Anfangsbedingungen bestimmen:

$$\text{konst} = \beta_K \overset{(3)}{=} Q(q_0, p_0, t_0), \quad \text{konst.} = \alpha_K \overset{(3)}{=} P_K(q_0, p_0, t_0) \quad (5)$$

Satz: (1) Die Lösung der kanonischen Bewegungsgl. ist äquivalent dazu, eine allgemeine Lösung

H39

$\tilde{S} = \tilde{S}(q,\alpha,t)$ der partiellen Differentialgleichung (DGL) ("Hamilton-Jacobi-Gleichung")

$$\boxed{H\left(q_1, \ldots, q_f, p_1 = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_1}, \ldots, p_f = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0} \quad (1)$$

zu finden, mit f unabhängigen "Integrationskonstanten" $\alpha_1, \ldots, \alpha_f$ (alle zeitunabhängig)

(2) Insbesondere gilt dann: $P_K = \alpha_K = \text{konst.}$, $Q_K = \frac{\partial \tilde{S}(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_K} = \beta_K = \text{konst.}$ (2)

und durch Auflösen nach q folgt: $q_K = q_K(\beta, \alpha, t)$ (3)

Beweis (1): Eine solche Lösung sei gegeben; betrachte sie als Erzeugende vom Typ F2:

$$F_2(q,P,t) := \tilde{S}(q,P,t), \quad \alpha_K = P_K \quad (4)$$

Die neue Hamilton-Funktion ist dann

$$\tilde{H}(Q,P,t) \overset{(37.16)}{=} H(q,p,t)\Big|_{p_K = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_K}} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \overset{!}{=} 0 \quad (5)$$

Forderung an $\tilde{S}$ □.

Beweis (2): folgt trivial, analog zu (38.3-5), mit $Q_K \overset{(37.36)}{=} \frac{\partial F_2}{\partial P_K} = \frac{\partial \tilde{S}(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_K}$ (6)

□.

H40

Bemerkung: Da in der Hamilton-Jacobi-Theorie [Gl. (39.1,2)] nur Ableitungen der Erzeugenden vorkommen, ist sie nur bis auf eine Additive Konstante bestimmt. Per Konvention wird diese so gewählt, dass

$$\tilde{S}(q_0, \alpha, t_0) = 0 \tag{0}$$

Satz: Wenn die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, vereinfacht die Wahl

(eine der α_k sei E)

$$\boxed{\tilde{S}(q, \underbrace{\alpha}_{\alpha_1, \dots, \alpha_f}, t) = -E(t - t_0) + W(q, \alpha_1 = E, \alpha_2, \dots, \alpha_f)} \tag{1}$$

"verkürzte Wirkung"

für die Erzeugende die Hamilton-Jacobi-Gl. zu

"verkürzte Hamilton-Jacobi-Gl."

$$\boxed{H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_f}\right) = E} \tag{2}$$

Beweis:

$$H\Big(q_1, \dots, q_f, p_1 = \underbrace{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_1}}_{\overset{(1)}{=} \frac{\partial W}{\partial q_1}}, \dots, p_f = \underbrace{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_f}}_{\overset{(1)}{=} \frac{\partial W}{\partial q_f}}, \cancel{t}\Big) + \underbrace{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}}_{-E} \overset{(39.1)}{=} 0 \tag{3}$$

laut Annahme zeitunabhängig

$\Rightarrow (2)$ □.

Bemerkung: Der Ansatz (1) funktioniert nur, weil H NICHT explizit zeitabhängig ist.
Wäre $H = H(t)$ bräuchten wir eine Zeitabhängigkeit in $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = \text{Funkt. v. } t$ (4)

H41

Beispiel: Harmonischer Oszillator

Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 := E = \text{Konst} \tag{1}$$

Erzeugende:

$$\tilde{S}(q, \alpha = E, t) \overset{(40.1)}{=} -Et + W(q, \alpha = E) \quad (t_0 = 0) \tag{2}$$

Verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung (40.2) für $W = W(q, E)$

$$H(q, \underbrace{\frac{\partial W}{\partial q}}_{p}) \overset{(40.2)}{=} E: \qquad \frac{1}{2m}\left[\frac{\partial}{\partial q} W(q, E)\right]^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \overset{(1)}{=} E \tag{3}$$

Diff.Gl. für $W(q, E)$

$$\frac{\partial}{\partial q} W(q, E) \overset{(3)}{=} \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q^2} \tag{4}$$

$\tilde{S} = -Et + W \quad (t_0 = 0)$

Integriert: $\int_{q_0}^{q} dq'$ (4):

$$\underbrace{W(q, E) - \underbrace{W(q_0, E)}_{:=0}}_{(40.0,1)} = \int_{q_0}^{q} dq' \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q'^2} \tag{5}$$

(= 0 für $q = q_0$)

Explizite Lösung des Integrals nicht nötig, denn

$$p \overset{(35.3a)}{=} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \qquad (1)$$

H42

(35.3b) oder (39.2)

$\alpha = E$

$$Q = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial E}\left[-Et + W(q,E)\right] \qquad (2)$$

$$\overset{(41.5)}{=} -t + \int_{q_0}^{q} dq' \, \frac{1}{2} \, \frac{2m}{\sqrt{2mE - m^2\omega^2 q'^2}} \qquad (3)$$

$$\text{konst.} = \beta =: Q \overset{\text{Bronstein}}{=} -t + \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{m\omega q}{\sqrt{2mE}}\right) + \cancel{\text{konst.}} \qquad (4)$$

↳ absorbiert in β

Auflösen nach q(t) und p(t) liefert bekannte Lösung:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin[\omega(t+\beta)] \quad \checkmark \quad \text{wie bekannt!} \qquad (5)$$

$$p(t) \overset{(1,5)}{=} \sqrt{2mE}\sqrt{1 - \sin^2\omega(t+\beta)} = \sqrt{2mE}\cos\omega(t+\beta) \quad \checkmark \qquad (6)$$

Anfangsbedingungen bei t=0 legen α, β fest:

$$E \overset{(41.1)}{=} \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2 \; ; \quad \beta \approx (t+\beta)\Big|_{t=0} \overset{(5)/(6)}{=} \arctan\left[m\omega \frac{q_0}{p_0}\right] \qquad (7) \quad \square$$

Physikalische Interpretation der Erzeugenden:

H43

Satz: Die Lösung $\tilde{S}(q,\alpha,t)$ der Hamilton-Jacobi-Gl. ist gerade die Wirkung entlang der physikalischen Trajektorie.

Beweis: Betrachte

$$\frac{d}{dt}\tilde{S}(q,\underset{\text{zeitunabhängig!}}{\alpha},t) = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k}\dot{q}_k \qquad (1)$$

(37.3a)

Hamilton-Jacobi-Gl.: $H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

$$= -H(q,p,t) + \sum_k p_k \dot{q}_k \qquad (2)$$

(2) = Legendre-Transf. der Hamilton-Funktion:

$$= L(q,\dot{q},t), \quad \text{mit} \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad (3)$$

(1) integriert:

$$\boxed{\tilde{S}(q,\alpha,t) = \int_{t_0}^{t} dt' \, L(q(t'),\dot{q}(t'),t')} + \tilde{S}(q_0,\alpha,t_0) \qquad (4) \quad \square$$

↳ $:= 0$ (40.9)

Folgerung: Das Wirkungsintegral läßt sich als Erzeugende für gerade die kanonische Transf. interpretieren, die die Hamilton-Funktion "trivial" macht.

Bemerkung: Um (4) zu verifizieren, muss Lösung der Bewegungsgleichung bereits bekannt sein.

Beispiel: (43.4) für Harmonischen Oszillator:

H44

$$\tilde{S}(q,E,t) \overset{(41.2)}{=} W(q,E) - E(t-t_0) \quad (1)$$

$$\overset{(41.5)}{=} \int_{q_0}^{q} \underbrace{dq'}_{dt'\frac{dq'}{dt'}} \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q'^2} + \underbrace{W(q_0,E)}_{:=0} - E(t-t_0) \quad (2)$$

Transformation der Integrationsvariablen:
$q' \to t'$

$$= \int_{t_0}^{t} dt' \Big[\underbrace{\dot{q}(t')}_{\overset{(42.5)}{\omega\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\cos(\omega(t+\beta))}} \underbrace{\sqrt{2mE - m^2\omega^2 q'^2}}_{\overset{(42.6)}{\sqrt{2mE}\cos\omega(t+\beta)}} - E \Big] \quad (3)$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt' \; 2E\left[\cos^2[\omega(t+\beta)] - \tfrac{1}{2}\right] \quad (4)$$

$$L = T - V = \frac{p^2}{2m} - \tfrac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (5)$$

Lagrange-Funktion:

$$\overset{(42.5,6)}{=} E\left\{\cos^2(\omega(t+\beta)) - \sin^2[\omega(t+\beta)]\right\} \quad (6)$$

$\cos^2 - \sin^2 = 2\left(\cos^2 - \tfrac{1}{2}\right)$

$$= 2E\left\{\cos^2[\omega(t+\beta)] - \tfrac{1}{2}\right\} \longleftarrow \quad (7)$$

= Integrand v. (4), konsistent mit (43.4)

Zusammenfassung: Hamilton-Jacobi-Theorie

H45

	Allgemein	Spezialfall	
Anwendbar für:	$H = H(q,p,t)$	$H = H(q,p)$	(1)
Ziel: finde kanonische Transformation, so dass folgende Größen automatisch erhalten sind:	alle Q_i, P_i	alle P_i	(2)
Formale Forderung:	$\tilde{H}(P,Q,t) = 0$ zyklisch in allen P_i	$H(p,q) = E$ $\tilde{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H + \frac{\partial}{\partial t}(W - \alpha_1 t)$	(3)
Bewegungsgleichungen für neue Variablen:	$\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = 0$,	$\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = 0$	(4a)
	$\dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \; 0$	$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} = 0$	(4b)
Lösungen für neue Variablen:	$Q_k = \beta_k$, $P_k = \alpha_k$	$Q_k = \beta_k$, $P_k = \alpha_k$	(5)
Erzeugende, die gewünschte Transf. liefert: (F_2)	$S = S(q,P,t)$ Hamiltonsche Wirkungsfunktion	$S = W - \alpha_1 t$ $W = W(q,P)$ Charakteristische Hamilton-Funktion (verkürzte Wirkung)	(6)

H46

Erzeugende wird bestimmt durch die partielle Hamilton-Jacobi-Gleichung (HJG):

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \qquad H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) - \alpha_1 = 0 \qquad (7)$$

[bedeutet: ersetze p_k durch $\partial S / \partial q_k$]

Die vollständige Lösung der HJG enthält n Integrationskonstanten, die gleich den erhaltenen Impulsen gesetzt werden können:

$$\gamma_i := P_i = \alpha_i = \text{const.} \qquad (8)$$

Vollständigen Lösungen der HJG sind also Funktionen der neuen Impulse:

$$S = S(q, \alpha, t) \qquad W = W(q, \alpha) \qquad (9)$$

Eine Hälfte der Transformationsgleichungen ist automatisch erfülllt (da genutzt in Konstruktion der HJG):

(F_2)

$$p_k(q, \alpha, t) = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \qquad p_k(q, \alpha) = \frac{\partial W}{\partial q_k} \qquad (10)$$

Die andere Hälte der Transformationsgleichungen,

$$\beta_k = Q_k(q, \alpha, t) = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}, \qquad -\delta_{k1} t + \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = Q_k(q, \alpha, t) = \beta_k \qquad (11)$$

lässt sich auflösen nach den alten Koordinaten, und liefert somit die gewünschte Lösung der Bewegungsgl.:

$$q = q(\alpha, \beta, t) \qquad (12)$$

Anfangsbedingungen für Koordinaten und Impulse, eingesetzt in (10) und (11), legen die Konstanten fest:

$$\alpha = \alpha(q_0, p_0, t_0), \qquad \beta = \beta(q_0, p_0, t_0) \qquad (13)$$

Falls H nicht von der Zeit abhängt, gilt:

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha_1 t \qquad (14)$$

H47

Separation der Variablen in Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wir wissen bereits: falls H nicht von t abhängt, separiert die Erzeugende in zwei Beiträge, linear in t bzw. unabhängig von t:

Charakteristische Hamilton-Funktion

$$S(q, \alpha, t) = -\alpha_1 t + W(q, \alpha) \qquad (1)$$

denn dann reproduziert die HJG die t-unabhängigkeit von H:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1 = \text{const.} \qquad (2)$$

Analog gilt:
falls H ausserdem zyklisch in einer Koordinate ist, z.B. in q_f, $\quad H = (q_1 \dots q_{f-1}, p_1 \dots p_f)$
kann auch W(q,P) in zwei Beiträge separiert werden, linear in q_f bzw. unabhängig von q_f:

KEINE SUMME

$$W(q, \alpha) = \alpha_f q_f + W'(q_1, \dots, q_{f-1}, P_1, \dots, P_f) \qquad (3)$$

Grund: dann reproduziert (3) die Tatsache, dass der zu q_f konjugierte Impuls erhalten ist:

$$\dot{p}_f = -\frac{\partial H}{\partial q_f} = 0 \Rightarrow p_f = \text{konst.}$$

(37.3a)

$$P_f = \frac{\partial W}{\partial q_f} = \alpha_f = \text{const.} \qquad (4)$$

HJG (2) vereinfacht sich zu:

$$\boxed{H\left(q_1, \dots, q_{f-1}, \frac{\partial W'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_{f-1}}, \overset{(4)}{\alpha_f}\right) = \alpha_1} \qquad (5)$$

(Für allgemeine Diskussion, unter welchen Umständen HJ-Gl. separierbar ist, siehe Goldstein, Kapitel 10.4.)

Beispiel: Zentralkraft-Problem: V = V(r) H48

Wähle Polarkoordinaten in der Bahnebene: (ρ, φ) (z = 0 = konst.)

Zwischenrechnung: Finde Hamilton-Funktion H = H(q,p):

Kinetische Energie:
[Blatt 6, Beispielaufgabe (1e)']

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right] , \quad V = V(\rho) \tag{1}$$

Kanonische Impulse:

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} , \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m} \tag{2a}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi} , \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \tag{2b}$$

Hamilton-Funktion:

$H(q,p) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$

$$H = p_\rho \dot{\rho} + p_\varphi \dot{\varphi} - L \tag{3}$$

$$\overset{(2)}{=} p_\rho \frac{p_\rho}{m} + p_\varphi \frac{p_\varphi}{m\rho^2} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{p_\rho}{m}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{p_\varphi}{m\rho^2}\right)^2 - V \right] \tag{4}$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}\left[p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} \right] + V(\rho)} \qquad \varphi = q_f = \text{zyklisch} \tag{5}$$

H49

Notationskonvention: $q_1 = \rho$, $\alpha_1 = E$, $q_2 = \varphi$, $\alpha_2 = \alpha_\varphi = \alpha_f$ (1)

Charakteristische Hamilton-Funktion laut (47.3):

$$W(q,\alpha) \overset{(47.3)}{=} \alpha_f q_f + W'(q_1, \dots, q_{f-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_f) , \tag{2}$$

Kurznotation

Hier:

$$W(\rho, \varphi, \alpha_1, \alpha_\varphi) = \alpha_\varphi \varphi + W'(\rho, \alpha_1, \alpha_\varphi) \tag{3}$$

bedeutet: ersetze p_k durch $\partial W' / \partial q_k$

Hamilton-Jacobi-Gl. laut (47.5):

$$H\left(q_1, \dots, q_{f-1}, \frac{\partial W'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W'}{\partial q_{f-1}}, \alpha_f\right) = \alpha_1 \tag{4}$$

Hier:

$$\boxed{\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W'}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\rho^2} \right] + V(\rho) = \alpha_1} \tag{5}$$

α_f^2

(5) aufgelöst nach $\frac{\partial W'}{\partial \rho}$:

$$\frac{\partial W'}{\partial \rho} = \pm \sqrt{2m\left[\alpha_1 - V(\rho)\right] - \frac{\alpha_\varphi^2}{\rho^2}} \tag{6}$$

Volle Erzeugende, (49.3):

$W = \alpha_\varphi \varphi + W'$

$\uparrow \int d\rho$ (49.6)

$$\boxed{W = \alpha_\varphi \varphi \pm \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \sqrt{2m[\alpha_1 - V(\rho')] - \alpha_\varphi^2/\rho'^2}} \qquad (1)$$

H50

Transformationsgl.: (46.11)

$$-\delta_{k1} t + \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = Q_k(q,\alpha,t) = \beta_k \qquad (2)$$

(2) mit $k=1$:

$$t + \beta_1 \overset{(2)}{=} \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \overset{(1)}{=} \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \left(\frac{\pm m}{\sqrt{2m[\alpha_1 - V(\rho')] - \alpha_\varphi^2/\rho'^2}} \right) \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \int \qquad (3)$$

(3) gibt Radius ρ als Funktion der Zeit, konsistent mit ZP7.3 !! (mit $\beta_1 = -t_0$)

(2) mit $k=2$:

$$\beta_2 \overset{(2)}{=} \frac{\partial W}{\partial \alpha_\varphi} \overset{(1)}{=} \varphi + \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \left(\frac{\mp \alpha_\varphi/\rho'^2}{\sqrt{2m[\alpha_1 - V(\rho')] - \alpha_\varphi^2/\rho'^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_\varphi} \int \qquad (4)$$

(4) gibt Winkel φ als Funktion des Radius ρ, liefert also Bahnkurve, konsistent mit ZP8.2 !! (mit $\beta_2 = \varphi_0$)

HJ-Formalismus ist sehr mächtig - zentrale Ergebnisse folgen mit sehr wenig Aufwand!

Für analoge Behandlung der Zentralkraft in Kugelkoordinaten: siehe Goldstein.