

Definition: Variablentransformation d. Form (2) heisst "kanonisch", wenn sie d. Form der kanonischen Bewegungsgleichungen erhält, d.h., wenn ein $\tilde{H}(Q,P,t)$ existiert, für das gilt:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \rightarrow \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \quad (1)$$

Allgemeines Konstruktionsprinzip einer kanonischen Transformation: wähle "erzeugende F" und konstruiere neue Hamilton-Funktion gemäß:

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t) = \sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q_k, P_k, t) + \frac{d}{dt} F(q, p, Q, P, t) \quad (2)$$

Bemerkung: Da nur zwei der vier Variablensätze q, p, Q, P unabhängig sind, gibt es vier verschiedene Klassen von "Erzeugenden" F. (Je nach Problemstellung ist eine nützlicher als die anderen.)

$$F = F_1(q, Q, t) \quad (3)$$

$$F = F_2(q, P, t) - \sum_k Q_k P_k \quad (4)$$

$$F = F_3(p, Q, t) + \sum_k q_k P_k \quad (5)$$

$$F = F_4(p, P, t) + \sum_k q_k P_k - \sum_k Q_k P_k \quad (6)$$

Analog für andere Tr.-Klassen: (29.5), mit Einsteinscher Summenkonvention:

$$\underbrace{-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{dF}{dt}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}}_{(1a)} = \underbrace{\tilde{H}(Q,P,t) - H(q,p,t)}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}}_{(1b)} \quad \text{H37}$$

gilt für alle Klassen von F

Erzeugende F	(1a) = 0	Gleichungen benötigt für	Koeff.-Vergleich
$F = F_1(q, Q, t)$	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{\partial F_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k$	$p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}$ (2a) (2b)	\dot{q}_k, \dot{Q}_k
$F = F_2(q, P, t) - Q_k P_k$	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \dot{P}_k - \dot{Q}_k P_k - Q_k \dot{P}_k$	$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}$ (3a) (3b)	\dot{q}_k, \dot{P}_k
$F = F_3(p, Q, t) + q_k P_k$	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{\partial F_3}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial F_3}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \dot{q}_k P_k + q_k \dot{P}_k$	$q_k = -\frac{\partial F_3}{\partial p_k}, \quad P_k = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_k}$ (4a) (4b)	\dot{p}_k, \dot{Q}_k
$F = F_4(p, P, t) + q_k P_k - Q_k P_k$	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{\partial F_4}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial F_4}{\partial P_k} \dot{P}_k + \dot{q}_k P_k + q_k \dot{P}_k - \dot{Q}_k P_k - Q_k \dot{P}_k$	$q_k = -\frac{\partial F_4}{\partial p_k}, \quad Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k}$ (5a) (5b)	\dot{p}_k, \dot{P}_k

Hamilton-Jacobi-Theorie

H38

Bewegungsgleichungen werden einfacher, wenn die neuen Koordinaten zyklisch sind. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn eine zeitabhängige kanonische Transformation existiert,

$$\{q, p, H(q, p, t)\} \longrightarrow \{Q, P, \tilde{H}(Q, P, t) = H(q, p) + \frac{\partial F}{\partial t} \stackrel{\text{Forderung}}{=} 0\} \quad (1)$$

so dass die neue Hamilton-Funktion verschwindet:

Falls $\tilde{H}(Q, P, t) = 0$, folgt $\overset{(Hq)}{\dot{Q}_k} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = 0$, $\overset{(Hq)}{\dot{P}_k} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} = 0$ (2)

$$Q_k(q, p, t) = \beta_k = \text{const.}, \quad P_k(q, p, t) = \alpha_k = \text{const.} \quad (3)$$

Invertieren von (3) liefert gesuchte Lösung der Bewegungsgl.:

$$q_k = q_k(Q, P, t) = q_k(\beta, \alpha, t), \quad P_k = P_k(Q, P, t) = P_k(\beta, \alpha, t) \quad (4)$$

α_k, β_k spielen die Rolle von Integrationskonstanten, lassen sich durch Angabe v. Anfangsbedingungen bestimmen:

$$\text{const.} = \beta_k \stackrel{(2)}{=} Q_k(q_0, p_0, t_0), \quad \text{const.} = \alpha_k \stackrel{(2)}{=} P_k(q_0, p_0, t_0) \quad (5)$$

Satz: (1) Die Lösung der kanonischen Bewegungsgl. ist äquivalent dazu, eine allgemeine Lösung H39

$\tilde{S} = \tilde{S}(q, \alpha, t)$ der partiellen Differentialgleichung (DGL) ("Hamilton-Jacobi-Gleichung")

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1 = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_1}, \dots, p_f = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_f}, t) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

zu finden, mit f unabhängigen "Integrationskonstanten" $\alpha_1, \dots, \alpha_f$ (alle zeitunabhängig)

(2) Insbesondere gilt dann: $P_k = \alpha_k = \text{const.}, \quad Q_k = \frac{\partial \tilde{S}(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_k} = \beta_k = \text{const.}$ (2)

und durch Auflösen nach q folgt: $q_k = q_k(\beta, \alpha, t)$ (3)

Beweis (1): Eine solche Lösung sei gegeben; betrachte sie als Erzeugende vom Typ F2:

$$F_2(q, P, t) := \tilde{S}(q, P, t) \quad (4)$$

Die neue Hamilton-Funktion ist dann

$$\tilde{H}(Q, P, t) \stackrel{(35.16)}{=} H(q, p, t) \Big|_{P_k = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k}} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \stackrel{(1)}{=} 0 \quad (5)$$

Beweis (2): folgt trivial, analog zu (38.3-5), mit $Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = \frac{\partial \tilde{S}(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_k} = \beta_k$ (6)

Bemerkung: Da in der Hamilton-Jacobi-Theorie [Gl. (39.1,2)] nur Ableitungen der Erzeugenden vorkommen, ist sie nur bis auf eine Additive Konstante bestimmt. Per Konvention wird diese so gewählt, dass

$$\tilde{S}(q_0, \alpha, t_0) = 0 \quad (0)$$

Satz: Wenn die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, vereinfacht die Wahl (eine der α_k sei E)

$$\tilde{S}(q, \alpha, t) = -E(t - t_0) + W(q, \alpha_1 = E, \dots, \alpha_f) \quad (1)$$

für die Erzeugende die Hamilton-Jacobi-Gl. zu

$$H(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_f}) = E \quad (2)$$

"verkürzte Hamilton-Jacobi-Gl."

Beweis:

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1 = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_1}, \dots, p_f = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_f}) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \stackrel{(39.1)}{=} 0 \quad (3)$$

laut Annahme \rightarrow $\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_f} \right)$
(1) $\frac{\partial W}{\partial q_1}$ (f) $\frac{\partial W}{\partial q_f}$ \rightarrow $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = -E \Rightarrow$ (2) \square
zeitunabhängig

Bemerkung: Der Ansatz (1) funktioniert nur, weil H NICHT explizit zeitabhängig ist.

Wäre $H = H(t)$ bräuchten wir eine Zeitabhängigkeit in $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = \text{Funkt. v. } t$ (4)

Beispiel: Harmonischer Oszillator

Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 := E = \text{const.} \quad (1)$$

Erzeugende:

$$\tilde{S}(q, \alpha = E, t) \stackrel{(40.1)}{=} -E t + W(q, \alpha = E) \quad (2)$$

$(t_0 = 0)$

Verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung (40.2) für

$$W = W(q, E)$$

$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) \stackrel{(40.2)}{=} E :$$

$$\frac{1}{2m} \left[\frac{\partial}{\partial q} W(q, E) \right]^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \stackrel{(1)}{=} E \quad (3)$$

Diff.Gl. für $W(q, E)$

$$\frac{\partial}{\partial q} W(q, E) = \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q^2} \quad (4)$$

Integriert:

$$\int_{q_0}^q dq' \quad (4) :$$

$$W(q, E) - W(q_0, E) \stackrel{(40.0,1)}{=} 0 = \int_{q_0}^q dq' \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q'^2} \quad (5)$$

Explizite Lösung des Integrals nicht nötig, denn

$$p \stackrel{(35.3a)}{=} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q^2} \quad \boxed{H42} \quad (1)$$

(35.3b) oder (39.2)

$$\alpha = E$$

$$Q \stackrel{(39.2)}{=} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} \stackrel{(41.2)}{=} \frac{\partial}{\partial E} [-Et + W(q, E)] \quad (2)$$

$$\stackrel{(41.5)}{=} -t + \int_{q_0}^q \frac{1}{\sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q'^2}} \frac{\partial W}{\partial q'} dq' \quad (3)$$

Bronstein

$$= -t + \frac{1}{\omega} \arcsin \left(\frac{m\omega q}{\sqrt{2mE}} \right) + \cancel{\text{const.}} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \beta = \text{const.} \quad \hookrightarrow \text{absorbiert in } \beta$$

Auflösen nach $q(t)$ und $p(t)$ liefert bekannte Lösung:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin[\omega(t+\beta)] \quad (5)$$

$$p(t) \stackrel{(1,5)}{=} \sqrt{2mE} \sqrt{1 - \sin^2 \omega(t+\beta)} = \sqrt{2mE} \cos \omega(t+\beta) \quad (6)$$

Anfangsbedingungen bei $t=0$ legen α, β fest:

$$E \stackrel{(41.1)}{=} \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_0^2 \quad ; \quad (t+\beta) \stackrel{t_0=0}{=} \arctan \left[m \omega \frac{q_0}{p_0} \right] \quad (7) \quad \square$$

Physikalische Interpretation der Erzeugenden:

H43

Satz: Die Lösung $\tilde{S}(q, \alpha, t)$ der Hamilton-Jacobi-Gl. ist gerade die Wirkung entlang der physikalischen Trajektorie.

Beweis: Betrachte

$$\frac{d}{dt} \tilde{S}(q, \alpha, t) \stackrel{\text{zeitunabhängig!}}{=} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (1)$$

Hamilton-Jacobi-Gl:

$$H + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0$$

(2) = Legendre-Transf. der Hamilton-Funktion:

$$\stackrel{(39.1)}{=} -H(q, p, t) + \sum_k p_k \dot{q}_k \stackrel{(35.3a)}{=} \quad (2)$$

$$= L(q, \dot{q}, t) \quad , \quad \text{mit} \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (3)$$

(1) integriert:

$$\tilde{S}(q, \alpha, t) = \int_{t_0}^t L(q(t'), \dot{q}(t'), t') dt' + \tilde{S}(q_0, \alpha, t_0) \quad (4)$$

(40.0) $\hookrightarrow := 0$

Folgerung: Das Wirkungsintegral läßt sich als Erzeugende für gerade die kanonische Transf. interpretieren, die die Hamilton-Funktion "trivial" macht.

Bemerkung: Um (4) zu verifizieren, muss Lösung der Bewegungsgleichung bereits bekannt sein.

Beispiel: (43.4) für Harmonischen Oszillator:

H44

$$\tilde{S}(q, E, t) \stackrel{(41.2)}{=} W(q, E) - E(t - t_0) \quad (1)$$

$$\stackrel{(41.5)}{=} \int_{t_0}^t \frac{dq'}{m} \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q'^2} + W(q_0, E) - E(t - t_0) \quad (2)$$

Transformation der Integrationsvariablen:
 $q \rightarrow t$

$$= \int_{t_0}^t dt' \left[\dot{q}'(t') \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q'^2(t')} - E \right] \quad (3)$$

$$= \int_{t_0}^t dt' \left[\underbrace{\omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}_{(42.5)} \cos[\omega(t+\beta)] \underbrace{\sqrt{2mE} \omega \omega(t+\beta)}_{(42.6)} - \frac{1}{2} \right] \quad (4)$$

$$L = T - V = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (5)$$

Lagrange-Funktion:

$$\stackrel{(42.5, 6)}{=} E \left\{ \cos^2[\omega(t+\beta)] - \sin^2[\omega(t+\beta)] \right\} \quad (6)$$

$$\cos^2 - \sin^2 = 2(\cos^2 - \frac{1}{2})$$

$$= 2E \left\{ \cos^2[\omega(t+\beta)] - \frac{1}{2} \right\} \quad (7) \quad \leftarrow \text{= Integrand v. (4), konsistent mit (43.4)}$$

Zusammenfassung: Hamilton-Jacobi-Theorie

H45

Anwendbar für:

$$H = H(q, p, t) \quad H = H(q, p) \quad (1)$$

Ziel: finde kanonische Transformation, so dass folgende Größen automatisch erhalten sind:

$$\text{alle } Q_i, P_i \quad \text{alle } P_i \quad (2)$$

Formale Forderung:

$$\tilde{H}(P, Q, t) = 0 \quad \tilde{H}(P, Q) = \alpha_1 = P_1 \quad (3)$$

zyklisch in allen Q_i

Bewegungsgleichungen für neue Variablen:

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = 0, \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = \delta_{1k} \quad (4a)$$

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} = 0, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} = 0 \quad (4b)$$

Lösungen für neue Variablen:

$$Q_k = \beta_k, P_k = \alpha_k \quad Q_k = \beta_k + \delta_{1k} t, P_k = \alpha_k \quad (5)$$

Erzeugende, die gewünschte Transf. liefert:

$$S = S(q, P, t) \quad W = W(q, P) \quad (6)$$

Hamiltonsche Wirkungsfunktion

Charakteristische Hamilton-Funktion (verkürzte Wirkung)

Erzeugende wird bestimmt durch die partielle Hamilton-Jacobi-Gleichung (HJG):

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) - \alpha_1 = 0 \quad \boxed{H46} \quad (7)$$

↙ bedeutet: ersetze p_k durch $\frac{\partial S}{\partial q_k}$ ↗

Die vollständige Lösung der HJG enthält n Integrationskonstanten, die gleich den erhaltenen Impulsen gesetzt werden können:

$$p_i := P_i = \alpha_i = \text{const.} \quad (8)$$

Vollständigen Lösungen der HJG sind also Funktionen der neuen Impulse:

$$S = S(q, \alpha, t), \quad W = W(q, \alpha) \quad (9)$$

Eine Hälfte der Transformationsgleichungen ist automatisch erfüllt (da genutzt in Konstruktion der HJG):

$$p_k(q, \alpha, t) = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad p_k(q, \alpha) = \frac{\partial W}{\partial q_k} \quad (10)$$

(11)

Die andere Hälfte der Transformationsgleichungen,

$$\beta_k = Q_k(q, \alpha, t) = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}, \quad \delta_{k1} t + \beta_k = Q_k(q, \alpha, t) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_k}$$

lässt sich auflösen nach den alten Koordinaten, und liefert somit die gewünschte Lösung der Bewegungsgl.:

$$q = q(\alpha, \beta, t) \quad (12)$$

Anfangsbedingungen für Koordinaten und Impulse, eingesetzt in (10) und (11), legen die Konstanten fest:

$$\alpha = \alpha(q_0, p_0, t_0), \quad \beta = \beta(q_0, p_0, t_0) \quad (13)$$

Falls H nicht von der Zeit abhängt, gilt:

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha_1 t \quad (14)$$

Separation der Variablen in Hamilton-Jacobi-Gleichung

H47

Wir wissen bereits: falls H nicht von t abhängt, separiert die Erzeugende in zwei Beiträge, linear in t bzw. unabhängig von t:

$$\tilde{S}(q, \alpha, t) = -\alpha_1 t + W(q, \alpha) \quad \text{↙ Charakteristische Hamilton-Funktion} \quad (1)$$

denn dann reproduziert die HJG die t-unabhängigkeit von H:

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \Rightarrow H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = \alpha_1 = \text{const.} \quad (2)$$

Analog gilt:

falls H ausserdem zyklisch in einer Koordinate ist, z.B. in q_f , $H = (q_1, \dots, q_{f-1}, p_1, \dots, p_f)$ kann auch $W(q, P)$ in zwei Beiträge separiert werden, linear in q_f bzw. unabhängig von q_f

$$W(q, \alpha) = \alpha_f q_f + W'(q_1, \dots, q_{f-1}, p_1, \dots, p_f) \quad \text{KEINE SUMME} \quad (3)$$

Grund: dann reproduziert (3) die Tatsache, dass der zu q_f konjugierte Impuls erhalten ist:

$$p_f = \frac{\partial W}{\partial q_f} = \alpha_f = \text{const.} \quad (4)$$

HJG (2) vereinfacht sich zu:

$$H(q_1, \dots, q_{f-1}, \frac{\partial W'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W'}{\partial q_{f-1}}, \alpha_f) = \alpha_1 \quad (5)$$

(Für allgemeine Diskussion, unter welchen Umständen HJ-Gl. separierbar ist, siehe Goldstein, Kapitel 10.4.)

Beispiel: Zentralkraft-Problem: $V = V(r)$

H 48

Wähle Polarkoordinaten in der Bahnebene: (ρ, φ) ($z = 0 = \text{konst.}$)

Zwischenrechnung: Finde Hamilton-Funktion $H = H(q,p)$:

Kinetische Energie:
[Blatt 6, Beispielaufgabe (1e)']

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2] \quad (1)$$

Kanonische Impulse:

$$P_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho} \quad , \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = \frac{P_\rho}{m} \quad (2a)$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \rho^2 \dot{\varphi} \quad , \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{P_\varphi}{m \rho^2} \quad (2b)$$

Hamilton-Funktion:

$$H(q,p) = \sum_k P_k \dot{q}_k - L$$

$$H = P_\rho \dot{\rho} + P_\varphi \dot{\varphi} - L \quad (3)$$

$$= P_\rho \frac{P_\rho}{m} + P_\varphi \frac{P_\varphi}{m \rho^2} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{P_\rho}{m} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{P_\varphi}{m \rho^2} \right)^2 - V \right] \quad (4)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left[P_\rho^2 + \frac{P_\varphi^2}{\rho^2} \right] + V(\rho) \quad \varphi = q_f = \text{zyklisch} \quad (5)$$

Notationskonvention:

$$q_1 = \rho \quad , \quad \alpha_1 = E \quad , \quad q_2 = \varphi \quad , \quad \alpha_2 = \alpha_\varphi \quad ,$$

H 49

(1)

Charakteristische Hamilton-Funktion laut (47.3):

$$W(q, \alpha) \stackrel{(47.3)}{=} \alpha_f q_f + W'(q_1, \dots, q_{f-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_f) \quad (2)$$

Kurznotation

Hier:

$$W(\rho, \varphi, \alpha_1, \alpha_\varphi) = \alpha_\varphi \varphi + W'(\rho, \alpha_1, \alpha_\varphi) \quad (3)$$

Hamilton-Jacobi-Gl. laut (47.5):

$$H(q_1, \dots, q_{f-1}, \frac{\partial W'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W'}{\partial q_{f-1}}, \alpha_f) = \alpha_1$$

↙ bedeutet: ersetze P_k durch $\frac{\partial W'}{\partial q_k}$
↘ $P_f = \alpha_f$

Hier:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W'}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\rho^2} \right] + V(\rho) = \alpha_1 \quad (5)$$

(5) aufgelöst nach $\frac{\partial W'}{\partial \rho}$:

$$\frac{\partial W'}{\partial \rho} = \pm \sqrt{2m [\alpha_1 - V(\rho)] - \frac{\alpha_\varphi^2}{\rho^2}} \quad (6)$$

Volle Erzeugende, (49.3):

$$W = \alpha_\varphi \varphi + W'$$

$\uparrow \int dp$ (49.6)

$$W = \alpha_\varphi \varphi \pm \int_{\rho_0}^{\rho} dp' \sqrt{2m[\alpha_1 - V(\rho')] - \alpha_\varphi^2 / \rho'^2} \quad (1)$$

Transformationsgl.: (46.11)

$$\delta_{k_i} t + \beta_k = Q_k(q, \alpha, t) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} \quad (2)$$

(2) mit $K=1$:

$$t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int_{\rho_0}^{\rho} dp' \left[\frac{\pm m}{\sqrt{2m[\alpha_1 - V(\rho')] - \alpha_\varphi^2 / \rho'^2}} \right] \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \sqrt{\quad} \quad (3)$$

(3) gibt Radius ρ als Funktion der Zeit, konsistent mit ZP7.3!! (mit $\beta_1 = -t_0$)

(2) mit $K=2$:

$$\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\varphi} = \varphi + \int_{\rho_0}^{\rho} dp' \left[\frac{\mp \alpha_\varphi / \rho'^2}{\sqrt{2m[\alpha_1 - V(\rho')] - \alpha_\varphi^2 / \rho'^2}} \right] \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial \alpha_\varphi} \sqrt{\quad} \quad (4)$$

(4) gibt Winkel φ als Funktion des Radius ρ , liefert also Bahnkurve, konsistent mit ZP8.2!! (mit $\beta_2 = \varphi_0$)

HJ-Formalismus ist sehr mächtig - zentrale Ergebnisse folgen mit sehr wenig Aufwand!

Für analoge Behandlung der Zentralkraft in Kugelkoordinaten: siehe Goldstein.