

Schwingende Seite: Wellengleichung und Quantisierung

U26 - 10.07.07

51

Ziel: Herleitung und Lösung der Wellengleichung für schwingende Seite.
Illustration, wie Randbedingungen zu Quantisierungseffekten führen.
Zerlegung der Bewegung in Eigenmoden.

Herleitung der Wellengleichung (siehe Blatt 8, Aufgabe 4)

Ungestreckte Ruhelänge:
Gestreckte Ruhelänge:

Potentielle Energie
der ruhenden Seite:

$$V_0 =$$

(1)

Spannung (= Kraft in) der
ruhenden, gestreckten Seite:

$$F :=$$

(2)

Gesamtlänge
während Schwingung:

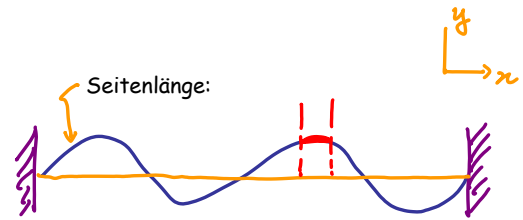
$$\tilde{L}(t) =$$

(3)

Zusätzliche Streckung
durch Schwingung:

$$\Delta =$$

(4)



Potentielle Energie
während Schwingung:

$$\tilde{V} =$$

(1)

52

Für kleine Schwingungen:

$$\approx$$

(2)

$$=$$

Energetische Strafe für Auslenkungen
(symmetrisch in y')

(3)

Energetische Strafe proportional zu F

Massendichte

Massenelement:

$$dm =$$

$$\rho_y =$$

(4)

Kinetische Energie der
schwingenden Seite:

$$\tilde{T} =$$

(5)

Lagrange-Funktion:

$$L_{\text{ag}} = \tilde{T} - \tilde{V}$$

(6)

Lagrange-Dichte:

Hamilton-Prinzip d. kleinsten Wirkung besagt: für physikalische Schwingung ist die Wirkung

53

$$S = \quad (1)$$

extremal. Das liefert ein Variationsproblem für

(siehe Seite L65,66)

Euler-Lagrange-Gl.:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \quad (2)$$

Für L von (2.6):

$$0 = \quad (3)$$

Wellengleichung (WG):

$$0 = \quad (4)$$

Kurznotation:

$$0 = \quad (5)$$

Wellengeschw.:

$$c = \quad (6)$$

Satz: "Superpositionsprinzip": Seien $y_1(x,t)$ und $y_2(x,t)$ Lösungen der WG (3.5). Dann ist die "Superposition" oder "lineare Überlagerung" $y_1(x,t) + y_2(x,t)$ ebenfalls eine Lösung.

54

(1)

Beweis: nutzt Linearität

(nur erste Potenzen von y !)

der Wellengleichung:

$$\partial_t^2 - \frac{1}{c^2} \partial_x^2 = 0 \quad (2)$$

y_1 und y_2 sind Lösungen:

$$\left(\partial_t^2 - \frac{1}{c^2} \partial_x^2 \right) y_1 + \left(\partial_t^2 - \frac{1}{c^2} \partial_x^2 \right) y_2 = 0 \quad (3)$$

Satz: Sei $f(z)$ eine beliebige 2fach-differenzierbare Fn. von z . Dann sind Lösungen der WG.

$$\partial_z f(z) =$$

$$\partial_x f(x+ct) = \quad (4a)$$

$$\partial_x^2 f(x+ct) = \quad (4b)$$

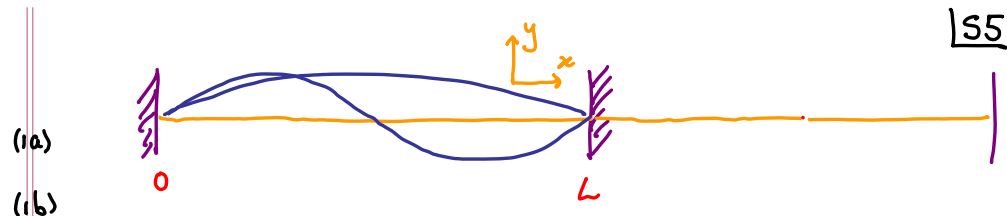
$$\partial_z^2 f(z) =$$

$$\partial_t f(x+ct) = \quad (4c)$$

$$\partial_t^2 f(x+ct) = \quad (4d)$$

$$\left(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) f(x+ct) = \quad (5)$$

Randbedingungen:
Seite ist fest bei



Mathematisch gesprochen ist $y(x,t)$, für alle t , eine periodische Funktion, mit Periode $2L$ (obwohl wir uns nur für einen eingeschränkten Bereich interessieren, mit $0 \leq x \leq L$).

Folglich läßt sich $y(x,0)$ als Fourier-Reihe darstellen:

$$y(x,0) =$$



(1)

Forderung: y = reell

$$y^*(x,0) =$$

(2)

$\Rightarrow$

(3)

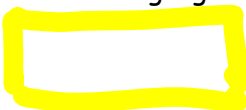
Ansatz für allgemeines t :

$$y(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ik_n x}$$

S6
(1)

garantiert, dass (1) die WG (3.5) erfüllt!

Randbedingung:



$$0 = y(0,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n^{(1)} + \tilde{a}_n^{(2)} \right] \quad (2)$$

$\Rightarrow$

(3)

(3) eingesetzt in (1):

$$y(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \quad (4)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin k_n x \left[\quad \right] \quad (5)$$

Allgemeine Form der
Lösung der WG mit
festen Randbed:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \left[A \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right] \quad (6)$$

(6.1) ist Überlagerung stehender Wellen. Betrachte eine Mode:

(1) 57

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$t = 0$$

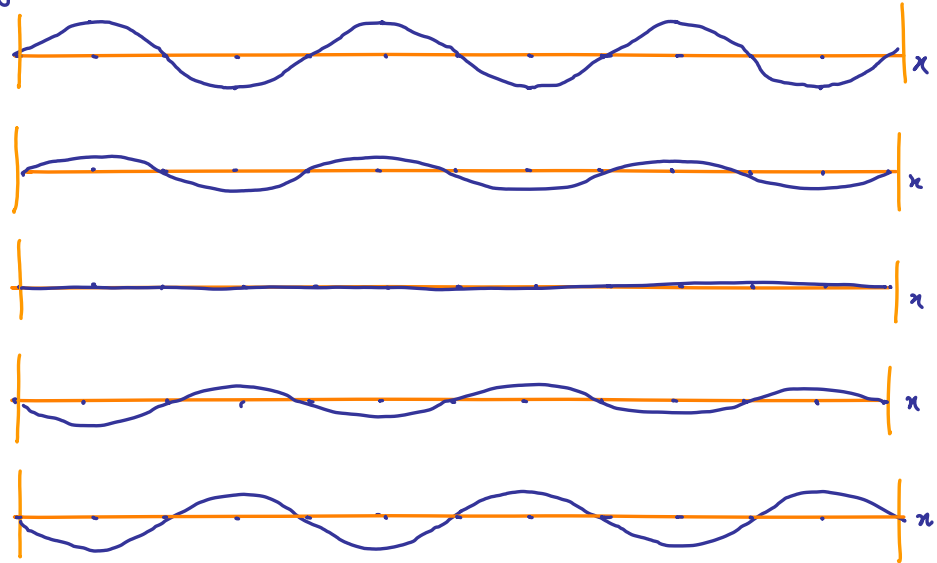
$$t =$$

$$t =$$

$$t =$$

$$t =$$

$$y(x,t)$$



Beachte: Frequenz und Wellenlänge der stehende Welle sind verknüpft, und quantisiert:

(1)

(2)

Grund für die "Quantisierung": Vorgabe von Randbedingungen!

Zwischenbemerkung: Ohne Randbed. hat WG auch "laufende Wellen" als Lösung:

$$y(x,t) = A \cos(\omega t - kx) \quad (1) \quad \underline{58}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

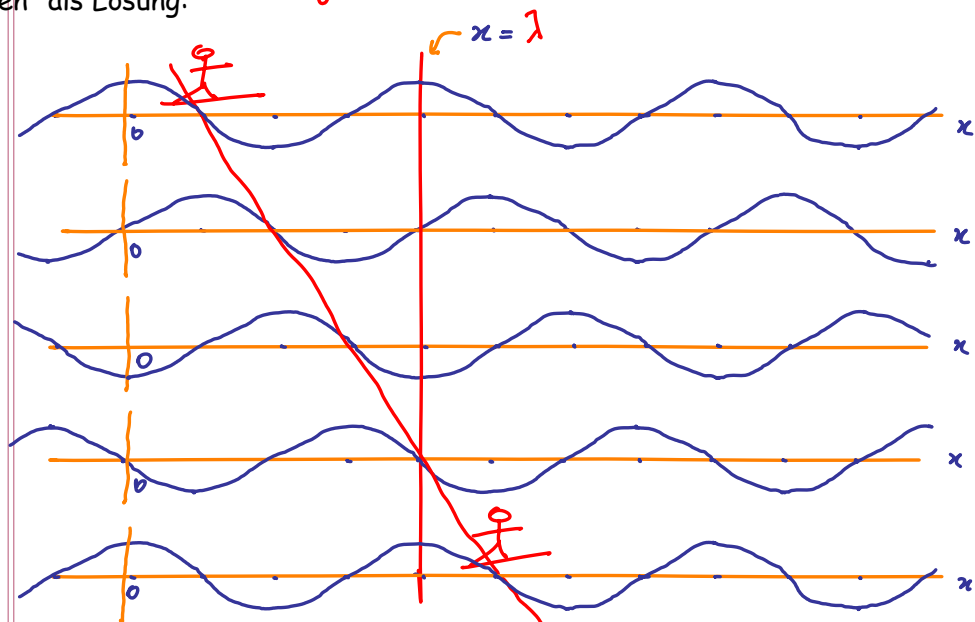
$$t = 0$$

$$t = T/4$$

$$t = T/2$$

$$t = 3T/4$$

$$t = T$$



Für Surfer, der sich mit Welle mit bewegt, ist Phase $\varphi = \omega t - kx = \text{konstant}$

Für alle Punkte mit $\varphi = \text{konstant}$ gilt: $0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega - k \frac{\partial x}{\partial t}$ (2)

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

$$\equiv v_{ph} \quad (3)$$

Zerlegung einer stehenden Welle nach "Normalmoden" ("Eigenmoden"):

S9

Gegeben sei

$$y(x, t=0) =: y(x), \text{ mit} \quad (1)$$

Fourier-Ansatz:

$$y(x) = \quad (2)$$

Mit Fourier-Koeffizienten:

$$a_m = \quad (3)$$

Check (2) eingesetzt in (3) liefert:

$$a_m = \quad (4)$$

Zeitentwicklung:

$$y(x, t) = \quad (5)$$

Zwischenrechnung:

S10

$$I_{m,n} := \int_0^L dx \sin(k_n x) \sin(k_m x) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{L} \int_0^L dx \left[\cos(k_n - k_m)x \overset{(1)}{-} \cos(k_n + k_m)x \right] \quad (2)$$

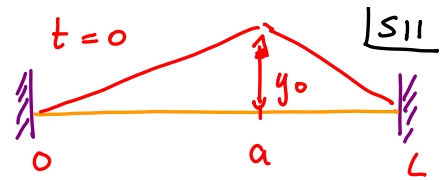
$$\overset{(1)}{=} = \begin{cases} \frac{\sin(k_n - k_m)x}{L(k_n - k_m)} \Big|_0^L = 0 & \text{if } n \neq m \\ \frac{1}{L} \int_0^L dx = 1 & \text{if } n = m \end{cases} \quad (3a)$$

$$\overset{(2)}{=} = \frac{\sin(k_n + k_m)x}{k_n + k_m} \Big|_0^L = 0. \quad (3b)$$

$\Rightarrow$

$$I_{m,n} = \delta_{mn} \quad (4)$$

Beispiel: gezupfte Seite:



$$y(x) = \begin{cases} x \frac{y_0}{a} & \forall x \in [0, a] \\ (L-x) \frac{y_0}{L-a} & \forall x \in [a, L] \end{cases}$$

Nachrechnen, mittels
(9.3)!

$$a_n = \frac{2y_0}{\pi^2(1-\varrho)\varrho} \frac{\sin m\pi\varrho}{m^2}, \quad \varrho = a/L$$

<http://www.jensign.com/JavaScience/www/plucker.html>

<http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/string/Fixed.html>

<http://www.colorado.edu/physics/phet/simulations/stringwave/stringWave.swf>