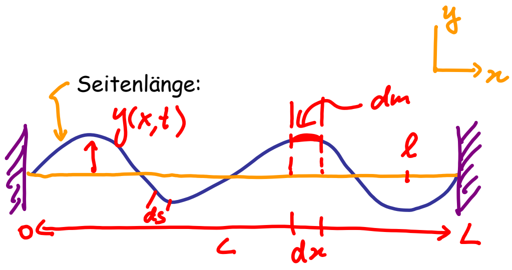
Schwingende Seite: Wellengleichung und Quantisierung

Ziel: Herleitung und Lösung der Wellengleichung für schwingende Seite.
Illustration, wie Randbedingungen zu Quantisierungseffekten führen.
Zerlegung der Bewegung in Eigenmoden.

Herleitung der Wellengleichung (siehe Blatt 8, Aufgabe 4)



Ungestreckte Ruhelänge: ℓ

Gestreckte Ruhelänge: $L > \ell$

Potentielle Energie der ruhenden Seite: (aber gestreckten)

$$V_0 = \frac{1}{2}k(L-\ell)^2 \qquad y' = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \qquad (1)$$

Spannung (= Kraft in) der ruhenden, gestreckten Seite:

$$F := \left|\frac{\partial V_0}{\partial L}\right| = k(L-\ell) \qquad (2)$$

a

Gesamtlänge während Schwingung:

$$\tilde{L}(t) = \int ds = \int_0^L dx \underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}_{\text{Taylor: } 1+\frac{1}{2}y'^2+\dots} = L + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L dx\, y'^2}_{:=\Delta} \qquad (3)$$

Zusätzliche Streckung durch Schwingung:

$$\Delta(t) = \tilde{L}(t) - L \overset{\text{Annahme}}{\ll} L - \ell \qquad (4)$$

Potentielle Energie während Schwingung:

$$\tilde{V} = \frac{1}{2}k(\underbrace{\tilde{L}}_{L+\Delta} - \ell)^2 = \frac{1}{2}k(L-\ell+\Delta)^2 \qquad (1)$$

Für kleine Schwingungen:

$$\simeq \underbrace{\frac{1}{2}k(L-\ell)^2}_{(1.1)\ V_0} + \underbrace{k(L-\ell)}_{(1.2)\ F}\Delta + \overbrace{\cancel{\frac{1}{2}k\Delta^2}}^{\simeq 0} \qquad (2)$$

$$\tilde{V}[y] = V_0 + \frac{F}{2}\int_0^L dx\, y'^2 \qquad (3)$$

Energetische Strafe für Auslenkungen (symmetrisch in y')

Energetische Strafe proportional zu F

Massenelement:

Massendichte

$$dm = \tau\, dx \qquad v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y} \qquad (4)$$

Kinetische Energie der schwingenden Seite:

$$\tilde{T} = \int dm\, \frac{1}{2}v_y^2 = \frac{\tau}{2}\int dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \qquad (5)$$

Lagrange-Funktion:

$$L_{ag} = \tilde{T} - \tilde{V} \overset{(3,5)}{=} \underbrace{-V_0}_{\text{uninteressant}} + \int_0^L dx \underbrace{\left[\frac{\tau}{2}\overbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}^{(5)} - \frac{F}{2}\overbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}^{(3)}\right]}_{\mathcal{L}} \qquad (6)$$

Lagrange-Dichte: $\mathcal{L}$

Hamilton-Prinzip d. kleinsten Wirkung besagt: für physikalische Schwingung $y = y(x,t)$
ist die Wirkung

$$S = \int_0^T dt\, L_{ag} \overset{(2.6)}{=} \int_0^T dt \int_0^L dx\, \mathcal{L}\left(\cancel{y}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t}, \cancel{t}\right) \qquad (1)$$

$F \to \mathcal{L}$, $x_1 \to x$, $x_2 \to t$

$i = 1$, $R = 2$

extremal. Das liefert ein Variationsproblem für $y = y(x,t)$ (siehe Seite L65,66) V13

$$\sum_{\nu=1}^{R} \frac{d}{dx_\nu}\left(\frac{\partial F}{\partial(\partial_\nu y_i)}\right) = \frac{\partial F}{\partial y_i},$$

Euler-Lagrange-Gl.:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial y/\partial x)}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial y/\partial t)}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}$$

Für L von (2.6):

$$0 \overset{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\frac{F}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(2\frac{\tau}{2}\frac{\partial y}{\partial t}\right) \qquad (3)$$

Wellengleichung (WG):

$$0 \overset{-(3)/F}{=} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\tau}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (4)$$

Kurznotation:

$$\boxed{0 = \partial_x^2 y - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 y} \qquad (5)$$

Wellengeschw.:

$$\boxed{c \overset{(4)}{=} \sqrt{F/\tau} \;:\; \text{dim}: \; m/s} \qquad (6)$$

Satz: "Superpositionsprinzip": Seinen y1(x,t) und y2(x,t) Lösungen der WG (3.5). Dann ist die "Superposition" oder "lineare Überlagerung" y1(x,t) + y2(x,t) ebenfalls eine Lösung. (1)

Beweis: nutzt Linearität
(nur erste Potenzen von y !)
der Wellengleichung:

$$\partial_x^2 [y_1 + y_2] - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 [y_1 + y_2] \overset{?}{=} 0 \qquad (2)$$

y1 und y2 sind Lösungen:

$$\left(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) y_1 + \left(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) y_2 = 0 + 0 \;\checkmark \qquad (3)$$

Satz: Sei f(z) eine beliebige 2fach-differenzierbare Fn. von z. Dann sind $f_\pm(x,t) = f(x \pm ct)$ Lösungen der WG.

$$\partial_z f(z) =: f'(z)$$

$$\partial_z^2 f(z) =: f''(z)$$

$$\partial_x f_\pm(x \pm ct) = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{z = x \pm ct} = f'(x \pm ct) \qquad (4a)$$

$$\partial_x^2 f_\pm(x \pm ct) = f''(x \pm ct) \qquad (4b)$$

$$\partial_t f_\pm(x \pm ct) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{z = x \pm ct} = \pm c f'(x \pm ct) \qquad (4c)$$

$$\partial_t^2 f_\pm(x \pm ct) = (\pm c)^2 f''(x \pm ct) \qquad (4d)$$

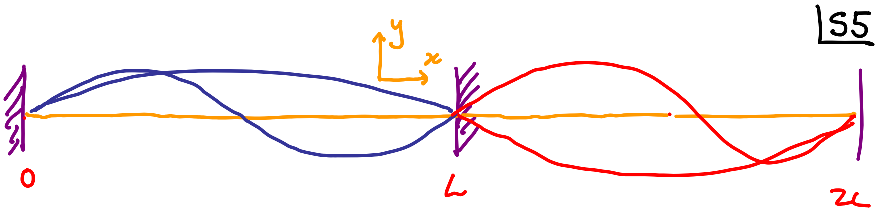
$$\left(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) f_\pm(x \pm ct) = \left[1 - \frac{1}{c^2}c^2\right] f''(x \pm ct) = 0 \;\checkmark \qquad (5)$$

$\square$

Randbedingungen:
Seite ist fest bei $x=0, L$

$y(0,t) = 0$ (1a)

$y(L,t) = 0$ (1b)



Mathematisch gesprochen ist y(x,t), für alle t, eine periodische Funktion, mit Periode $2L$
(obwohl wir uns nur für einen eingeschränkten Bereich interessieren, mit $0 \le x \le L$).

Folglich läßt sich y(x,0) als Fourier-Reihe darstellen:

$$y(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i \overbrace{\frac{2\pi n}{2L}}^{= k_n = \text{"Wellenvektor"}} x} \quad \left(= y(x+2L,0)\right) \qquad \boxed{k_n = \frac{\pi n}{L}} \qquad (1)$$

Forderung: y = reell

$$y^*(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^*_{-n} e^{+\frac{i\pi n}{L} x} =: y(x,0) \quad \forall x \qquad (2)$$

$n \to -n$

$$\Rightarrow \quad a^*_{-n} = a_n \quad \Rightarrow \quad a_{-n} = a^*_n \qquad (3)$$

Ansatz für allemeines t:
($n \to -n$ in 2)

$$y(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n e^{ik_n(x+ct)} + \tilde{a}_{-n} e^{-ik_n(x-ct)} \right] \qquad (1)$$

garantiert, dass (1) die WG (3.5) erfüllt!

Randebedingung: $x=0$

$$0 \overset{(1)}{=} y(0,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n e^{i\underbrace{k_n c}_{\omega_n} t} + \tilde{a}_{-n} e^{i\underbrace{k_n c}_{\omega_n} t} \right] \qquad (2)$$

$\boxed{\omega_n = c k_n}$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \tilde{a}_{-n} = -a_n \qquad (3)$$

(3) eingesetzt in (1):

$$y(x,t) \overset{(1)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2i\, a_n e^{i\omega t} \underbrace{\left[e^{ik_n x} - e^{-ik_n x} \right] \frac{1}{2i}}_{\sin k_n x} \qquad (4)$$

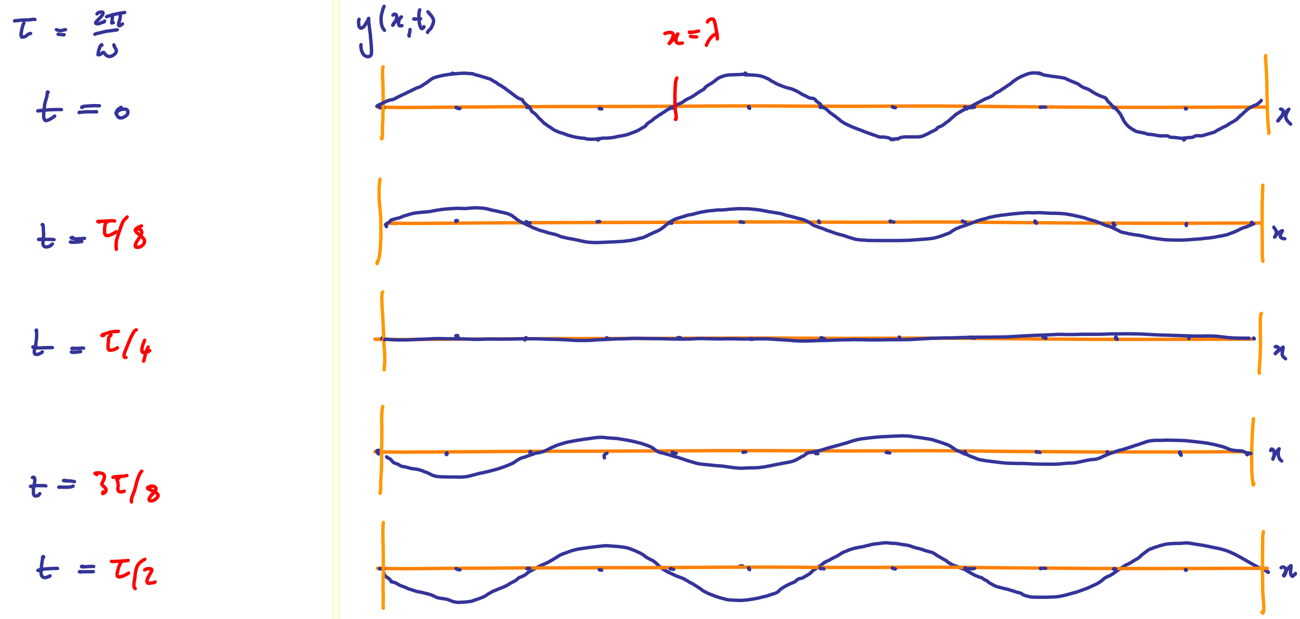
Randb: bei $x=L$?
$\sin(k_n L) = \sin(\frac{\pi n}{L} \cdot L) = 0$ ✓
$k_n = 0 \Rightarrow$ liefert 0
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n + f_{-n})$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \left[\underbrace{2i(a_n - \overset{(5.3)\; a_n^*}{a_{-n}})}_{-4\,\mathrm{Im}\, a_n =: A_n \in \mathbb{R}} \cos\omega_n t + \underbrace{2i(a_n + \overset{a_n^*\; (5.3)}{a_{-n}})\, i}_{-4\,\mathrm{Re}\, a_n =: B_n \in \mathbb{R}} \sin\omega_n t \right] \qquad (5)$$

Allgemeine Form der Lösung der WG mit festen Randbed:

$$\boxed{y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \left[\underbrace{A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t}_{C_n \cos(\omega_n t + \phi_n)} \right]} \qquad (6)$$

(6.1) ist Überlagerung stehender Wellen. Betrachte eine Mode: (1) S7

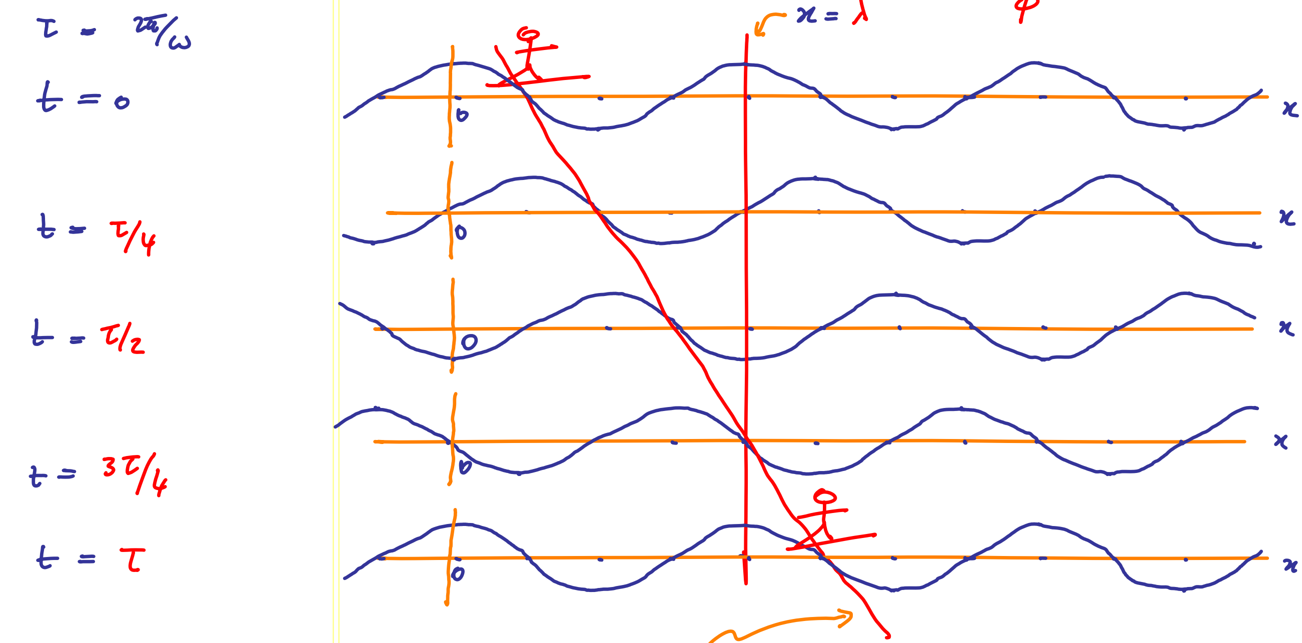


Beachte: Frequenz und Wellenlänge der stehende Welle sind verknüpft, $\omega_n = c k_n$ (1)

und quantisiert: $k_n = \frac{\pi n}{L}$, $\omega_n = \frac{c \pi n}{L}$, $\tau = \frac{1}{c \omega_n}$ (2)

Grund für die "Quantisierung": Vorgabe von Randbedingungen!

Zwischenbemerkung: Ohne Randbed. hat WG auch "laufende Wellen" als Lösung: $y(x,t) = A \cos(\underbrace{\omega t - kx}_{\varphi})$ (1) S8



Für Surfer, der sich mit Welle mitbewegt, ist Phase $= \varphi = \omega t - kx = \text{konstant}$

Für alle Punkte mit $\varphi = \text{konstant}$ gilt: $0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega - k \underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{\equiv v_{ph}}$ (2)

Phasengeschwindigkeit: $\boxed{v_{ph} = \frac{\omega}{k}}$ (3)

Zerlegung einer stehenden Welle nach "Normalmoden" ("Eigenmoden"):

S9

Gegeben sei $y(x, t=0) =: y(x)$, mit $y(0) = y(L) = 0$ (1)

Fourier-Ansatz: $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x$, $k_n = \frac{\pi n}{L}$ (2)

Mit Fourier-Koeffizienten: $a_m = \frac{1}{L} \int_0^L dx \, \sin k_m x \; y(x)$ (3)

Check (2) eingesetzt in (3) liefert:

$k_n = \frac{n\pi}{L}$

$a_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\frac{1}{L}\int_0^L dx \, \sin k_m x \, \sin k_n x}_{I_{m,n} = \delta_{mn}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_m \delta_{n,m} = a_m$ (4)

Zeitentwicklung: $\boxed{y(x,t) = \sum_n a_n \sin k_n x \underbrace{\cos \omega_n t}_{=1 \text{ bei } t=0}}$ (5)

S10

Zwischenrechnung:

$I_{m,n} := \int_0^L dx \, \sin(k_n x) \sin(k_m x)$ (1)

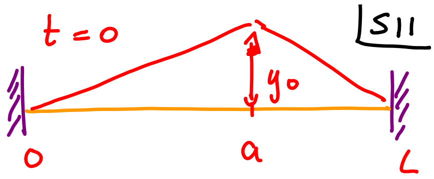
$= \frac{1}{L}\int_0^L dx \left[\cos(k_n - k_m) x - \cos(k_n + k_m) x \right]$ (2)

$① = \begin{cases} \left. \frac{\sin(k_n - k_m) x}{L(k_n - k_m)} \right|_0^L = 0 & \text{if } n \neq m \\ \frac{1}{L}\int_0^L dx = 1 & \text{if } n = m \end{cases}$ (3a)

$② = \left. \frac{\sin(k_n + k_m) x}{k_n + k_m} \right|_0^L = 0.$ (3b)

$\Longrightarrow \boxed{I_{m,n} = \delta_{mn}}$ (4)

Beispiel: gezupfte Seite:



$$y(x) = \begin{cases} x\,\dfrac{y_0}{a} & \forall\, x \in [0,a] \\[2ex] (L-x)\,\dfrac{y_0}{L-a} & \forall\, x \in [a,L] \end{cases}$$

Nachrechnen, mittels (9.3)!

$$a_n = \frac{2y_0}{\pi^2(1-Q)Q}\,\frac{\sin n\pi Q}{n^2}\,, \qquad Q = a/L$$

http://www.jensign.com/JavaScience/www/plucker.html

http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/string/Fixed.html

http://www.colorado.edu/physics/phet/simulations/stringwave/stringWave.swf