

Ziel: Herleitung und Lösung der Wellengleichung für schwingende Saite.

Illustration, wie Randbedingungen zu Quantisierungseffekten führen.

Zerlegung der Bewegung in Eigenmoden.

Herleitung der Wellengleichung (siehe Blatt 8, Aufgabe 4)

Ungestreckte Ruhelänge: ℓ
 Gestreckte Ruhelänge: $L > \ell$

Potentielle Energie
 der ruhenden Saite:

$$V_0 = \frac{1}{2} k (L - \ell)^2$$

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x}$$

(1)

Spannung (= Kraft in) der
 ruhenden, gestreckten Saite:

$$F := \left| \frac{\partial V}{\partial L} \right| = k (L - \ell)$$

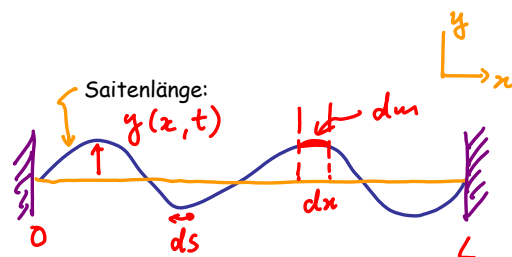
(2)

Gesamtlänge
 während Schwingung:

$$\tilde{L}(t) = \int ds = \int_0^L dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} = L + \frac{1}{2} \int_0^L dx y'^2 \quad (3)$$

Zusätzliche Streckung
 durch Schwingung:

$$\Delta = \tilde{L}(t) - L \stackrel{\text{Annahme}}{\ll} L - \ell \quad (4)$$



Potentielle Energie
 während Schwingung:

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} k (\tilde{L} - \ell)^2 \quad (1)$$

Für kleine Schwingungen:

$$\approx \underbrace{\frac{1}{2} k (L - \ell)^2}_{(1.1) \quad V_0} + \underbrace{k (L - \ell) \Delta}_{(1.2) \quad F} + \frac{1}{2} k \Delta^2 \stackrel{=0}{\quad} \quad (2)$$

$$\tilde{V}[y] = V_0 + \frac{F}{2} \int_0^L dx y'^2 \quad (3)$$

Energetische Strafe für Auslenkungen
 (symmetrisch in y')

Energetische Strafe proportional zu F

Massenelement:

$$dm = \tau dx$$

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y}$$

(4)

Kinetische Energie der
 schwingenden Saite:

$$\tilde{T} = \int dm \frac{1}{2} v_y^2 = \frac{\tau}{2} \int_0^L dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (5)$$

Lagrange-Funktion:

$$L_{\text{ag}} = \tilde{T} - \tilde{V} = -V_0 + \int_0^L dx \left[\frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{F}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (6)$$

uninteressant

Lagrange-Dichte:

Hamilton-Prinzip d. kleinsten Wirkung besagt: für physikalische Schwingung ist die Wirkung

$$y = y(x, t)$$

53

$$S = \int_0^T dt \mathcal{L}_{ag} \stackrel{(2.6)}{=} \int_0^T dt \int_0^L dx \mathcal{L} \left(y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t} \right) \quad (1)$$

extremal. Das liefert ein Variationsproblem für $y = y(x, t)$

(siehe Seite L65,66)

Euler-Lagrange-Gl.:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial y / \partial x)} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial y / \partial t)} \quad (2)$$

Für L von (2.6):

$$0 \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{2F}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2T}{2} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \quad (3)$$

Wellengleichung (WG):

$$0 \stackrel{(3)}{=} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{T}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (4)$$

$\frac{T}{F} = \frac{1}{c^2}$

Kurznotation:

$$0 = \partial_x^2 y - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 y \quad (5)$$

Wellengeschw.:

$$c \stackrel{(4)}{=} \sqrt{F/T} : \text{dim: m/s} \quad (6)$$

Satz: "Superpositionsprinzip": Seien $y_1(x, t)$ und $y_2(x, t)$ Lösungen der WG (3.5). Dann ist die "Superposition" oder "lineare Überlagerung" $y_1(x, t) + y_2(x, t)$ ebenfalls eine Lösung.

54

(1)

Beweis: nutzt Linearität

(nur erste Potenzen von y !)
der Wellengleichung:

$$\partial_t^2 [y_1 + y_2] - \frac{1}{c^2} \partial_x^2 [y_1 + y_2] = 0 \quad (2)$$

y_1 und y_2 sind Lösungen:

$$(\partial_t^2 - \frac{1}{c^2} \partial_x^2) y_1 + (\partial_t^2 - \frac{1}{c^2} \partial_x^2) y_2 = 0 + 0 \quad (3)$$

Satz: Sei $f(z)$ eine beliebige 2fach-differenzierbare Fn. von z . Dann sind $f_{\pm}(x, t) = f(x \pm ct)$ Lösungen der WG.

$$\partial_z f(z) =: f'(z)$$

$$\partial_x f_{\pm}(x \pm ct) = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{z=x \pm ct} = f'(x \pm ct) \quad (4a)$$

$$\partial_x^2 f_{\pm}(x \pm ct) = f''(x \pm ct) \quad (4b)$$

$$\partial_z^2 f(z) =: f''(z)$$

$$\partial_t f_{\pm}(x \pm ct) = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{z=x \pm ct} = \pm c f'(x \pm ct) \quad (4c)$$

$$\partial_t^2 f_{\pm}(x \pm ct) = (\pm c)^2 f''(x \pm ct) \quad (4d)$$

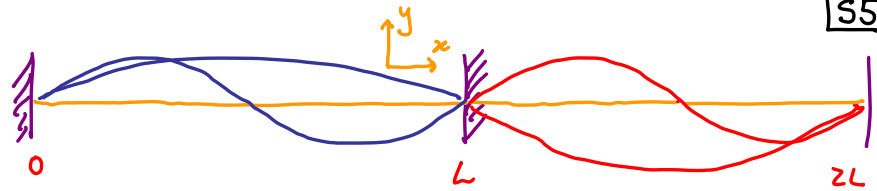
$$(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2) f(x \pm ct) = [1 - \frac{1}{c^2} c^2] f''(x \pm ct) = 0 \quad (5)$$

Randbedingungen:

Saite ist fest bei $x=0, L$

$$y(0, t) = 0 \quad (1a)$$

$$y(L, t) = 0 \quad (1b)$$



Mathematisch gesprochen ist $y(x, t)$, für alle t , eine periodische Funktion, mit Periode $2L$ (obwohl wir uns nur für einen eingeschränkten Bereich interessieren, mit $0 \leq x \leq L$).

Folglich lässt sich $y(x, 0)$ als Fourier-Reihe darstellen:

$$y(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i \frac{2\pi n}{2L} x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i k_n x} \quad (1)$$

$k_n = \frac{\pi n}{L}$

Forderung: y = reell

$$y^*(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n}^* e^{+i \frac{2\pi n}{2L} x} =: y(x, 0) \quad \forall x \quad (2)$$

$$\Rightarrow a_{-n}^* = a_n \quad (3)$$

Ansatz für allgemeines t :

($n \rightarrow -n$ in (2))

$$y(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n e^{i k_n (x + ct)} + \tilde{a}_{-n} e^{-i k_n (x - ct)} \right] \quad (1)$$

garantiert, dass (1) die WG (3.5) erfüllt!

Randbedingung:

$\omega_n = c k_n$

$$0 = y(0, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n e^{i k_n ct} + \tilde{a}_{-n} e^{+i k_n ct} \right] \quad (2)$$

$$\Rightarrow \tilde{a}_{-n} = -a_n \quad (3)$$

(3) eingesetzt in (1):

$$y(x, t) \stackrel{(1)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i \omega_n t} \left[e^{i k_n x} - e^{-i k_n x} \right] \frac{1}{2i} \quad (4)$$

$$\sin k_n(L) = \sin \frac{\pi n}{L} L = 0$$

$\Rightarrow$ (5.1b) ✓

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \left[\underbrace{2i(a_n - a_n^*)}_{-4 \operatorname{Im} a_n =: A_n \in \mathbb{R}} \cos \omega_n t + \underbrace{2i(a_n + a_n^*)}_{-4 \operatorname{Re} a_n =: B_n \in \mathbb{R}} i \sin \omega_n t \right] \quad (5)$$

Allgemeine Form der Lösung der WG mit festen Randbed:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \left[A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right] \quad (6)$$

$C_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$

(6.1) ist Überlagerung stehender Wellen. Betrachte eine Mode:

(1) 57

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

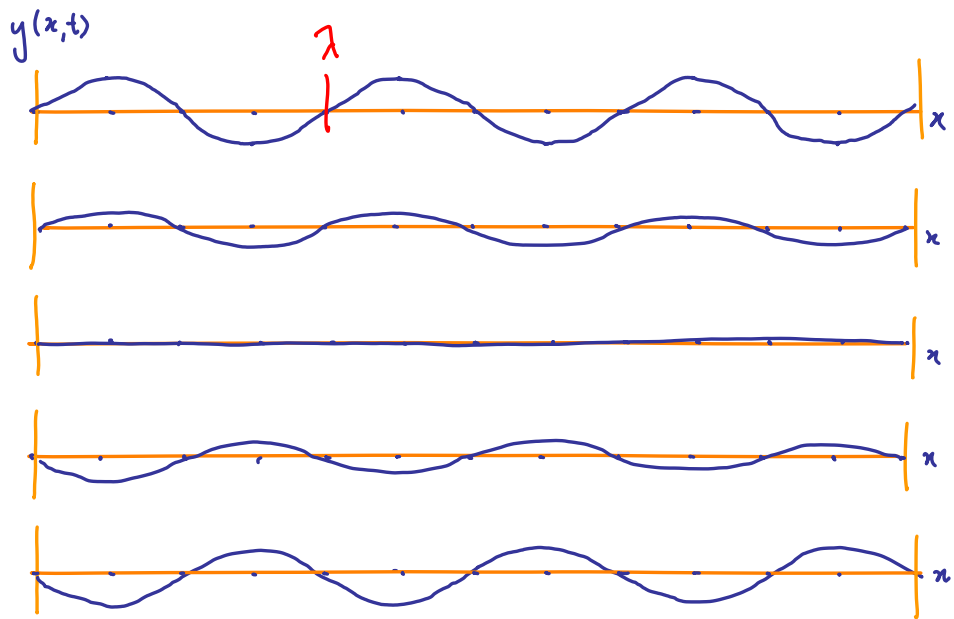
$$t = 0$$

$$t = T/8$$

$$t = T/4$$

$$t = 3T/8$$

$$t = T/2$$



Beachte: Frequenz und Wellenlänge der stehende Welle sind verknüpft, $\omega_n = c k_n$ (1)
und quantisiert:

$$k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \omega_n = \frac{c \pi n}{L} \quad (2)$$

Grund für die "Quantisierung": Vorgabe von Randbedingungen!

Zwischenbemerkung: Ohne Randbed. hat WG auch "laufende Wellen" als Lösung:

$$y(x,t) = A \cos(\omega t - kx) \quad (1) \quad \omega = ck$$

$$T = 2\pi/\omega$$

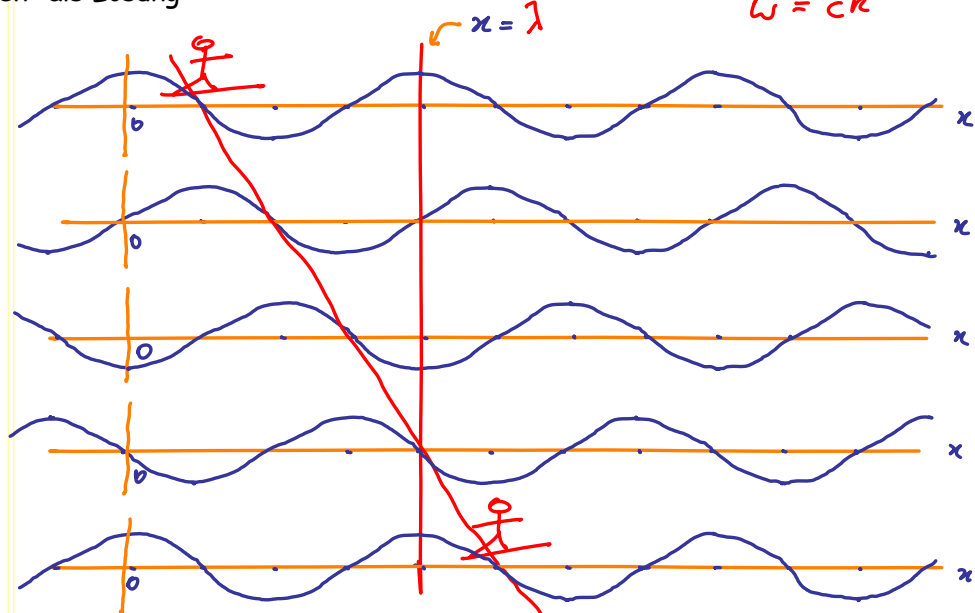
$$t = 0$$

$$t = T/4$$

$$t = T/2$$

$$t = 3T/4$$

$$t = T$$



Für Surfer, der sich mit Welle mit bewegt, ist Phase $= \varphi = \omega t - kx = \text{konstant}$

Für alle Punkte mit $\varphi = \text{konstant}$ gilt: $0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega - k \frac{\partial x}{\partial t}$ (2)

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

$$\equiv v_{ph} \quad (3)$$

Zerlegung einer stehenden Welle nach "Normalmoden" ("Eigenmoden"):

S9

Gegeben sei

$$y(x, t=0) =: y(x), \text{ mit } y(0) = y(L) = 0 \quad (1)$$

Fourier-Ansatz:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x, \quad k_n = \frac{\pi n}{L} \quad (2)$$

Mit Fourier-Koeffizienten:

$$a_m = \frac{1}{L} \int_0^L dx \sin k_m x y(x) \quad (3)$$

Check (2) eingesetzt in (3) liefert:

$$a_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\frac{1}{L} \int_0^L dx \sin k_m x \sin k_n x}_{I_{m,n} = \delta_{mn}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{mn} \stackrel{!}{=} a_m \quad (4)$$

Zeitentwicklung:

$$y(x, t) = \sum_n a_n \sin k_n x \cos \omega_n t \quad (5)$$

$\uparrow$
 $= 1 \text{ bei } t=0$

Zwischenrechnung:

S10

$$I_{m,n} := \int_0^L dx \sin(k_n x) \sin(k_m x) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{L} \int_0^L dx \left[\cos(k_n - k_m)x \overset{(1)}{-} \cos(k_n + k_m)x \right] \quad (2)$$

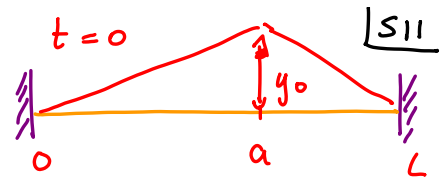
$$\overset{(1)}{=} = \begin{cases} \frac{\sin(k_n - k_m)x}{L(k_n - k_m)} \Big|_0^L = 0 & \text{if } n \neq m \\ \frac{1}{L} \int_0^L dx = 1 & \text{if } n = m \end{cases} \quad (3a)$$

$$\overset{(2)}{=} = \frac{\sin(k_n + k_m)x}{k_n + k_m} \Big|_0^L = 0. \quad (3b)$$

$\Rightarrow$

$$I_{m,n} = \delta_{mn} \quad (4)$$

Beispiel: gezupfte Seite:



$$y(x) = \begin{cases} x \frac{y_0}{a} & \forall x \in [0, a] \\ (L-x) \frac{y_0}{L-a} & \forall x \in [a, L] \end{cases}$$

Nachrechnen, mittels
(9.3)!

$$a_n = \frac{2y_0}{\pi^2(1-\varrho)\varrho} \frac{\sin m\pi\varrho}{m^2}, \quad \varrho = a/L$$

<http://www.jensign.com/JavaScience/www/plucker.html>

<http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/string/Fixed.html>

<http://www.colorado.edu/physics/phet/simulations/stringwave/stringWave.swf>