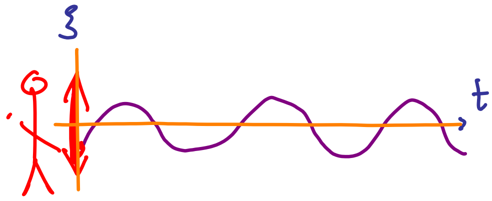
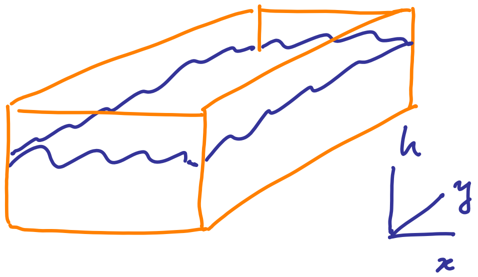
Beispiele von Wellenphänomenen

Skalare Wellen

- in 1D: z.B. geschüttelte Schnur entlang z-Achse



- in 2D: z.B. Wasserstand im Fischtank:



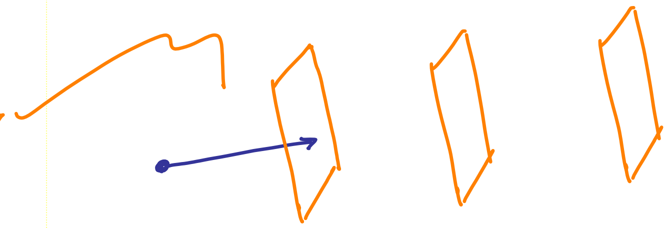
- in 3D: zB. Druckwelle: (1)

Ebene Welle, in $\vec{k}$-Richtung propagierend: (2)

"Phasenfläche" $\equiv$ {Menge aller , mit $= \varphi_0 =$ konst. } (1)

$\equiv$ {Menge aller , deren Projektion auf gegeben ist durch

Die roten Vektoren haben zu beliebiger gegebenen Zeit t_i alle dieselbe Projektion auf $\vec{k}$:



Formal: (1) $\equiv$ {Menge aller $\vec{r}$, mit $\vec{r} =$ } (mit) (2)

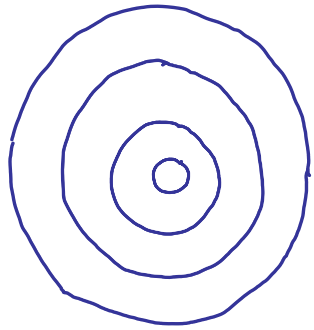
Check (2) $\stackrel{?}{=}$ (1): $\vec{r} = (\omega t + \varphi_0)\frac{\hat{k}}{k}$ (3)

Jeder dieser Punkte bewegt sich mit Geschw: (4)

d.h. Ebene propagiert mit Phasengeschwindigkeit in - Richtung (5)

Beispiel: Ebene Welle mit $\bar{k} = k\hat{z} \xRightarrow{(13.2)} p(\vec{r},t) =$ (1)

$\Rightarrow$ Phasenfläche in Ebene



Kugelwellen (z.B. Druckwellen)

Beispiel: $p(\vec{r},t) =$ (2)

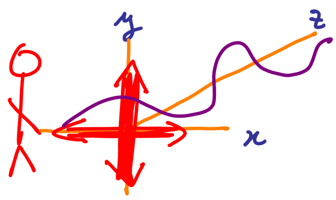
mit $r =$ (3)

Phasenflächen sind

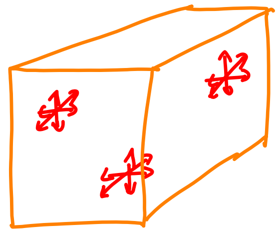
Richtung:

Wellenlänge: (4)

Vektorfeldwellen



2-Komponentig, in 1D: z.B. Schnur, geschüttelt in x- und y-Richtung: Auslenkung = (1)



3-Komponentig, in 3D: z.B. Luftgeschwindigkeit in Resonator, dessen Wände vibrieren:

"Transversale Welle": $\overrightarrow{\text{Auslenkung}}$ $\overrightarrow{\text{Propagationsrichtung}}$ (2)

"Longitudinale Welle": $\overrightarrow{\text{Auslenkung}}$ $\overrightarrow{\text{Propagationsrichtung}}$

Zerlegung der Auslenkung nach den 3 Polarisationsrichtungen:

$\vec{u}(\vec{r},t) =$ (3)

"Linear polarisierte" Welle: nur eine Polarisierungsrichtung,

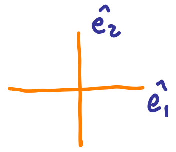
z.B. $\vec{u}(\vec{r},t) = \hat{e}_1 A_1 \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1)$ (1)

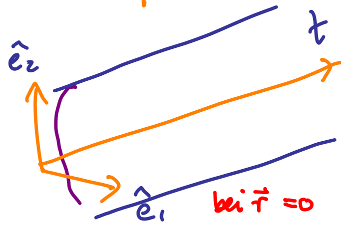
"Elliptisch" polarisierte Welle: zwei Polarisierungsrichtungen

z.B. $\vec{u}(\vec{r},t) = \hat{e}_1 A_1 \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1)$
$+ \hat{e}_2 A_2 \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t + \varphi_2)$ (2)

"Zirkular polarisiert:" zwei Polarisierungsrichtungen, 90° phasenverschoben:

z.B. $\vec{u}(\vec{r},t) = \hat{e}_1 A_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$
$+ \hat{e}_2 A_2 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ (3)





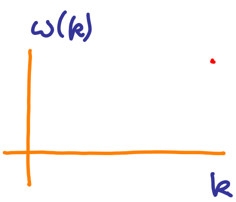
Dispersion

Bereits bekannt: Für $\cos(\omega t - kx)$ = (1)

ist Phasengeschw.: v_{ph} = (2)

Falls v_{ph} sondern von λ abhängt,
d.h. falls ω nicht linear von k abhängt
und folglich k nicht linear von ω abhängt
} zeigt Welle "Dispersion".

"Dispersionsrelation" gibt diese Abhängigkeiten an:
k = (3)
ω = (4)



wobei der "Brechungsindex" $n(\omega)$ im allgemeinen frequenzabhängig ist; dann spricht man von "frequenzabhängiger Dispersion".

Für Licht im Vakuum: v_{ph} = $\Rightarrow$ "keine Dispersion". (5)

Bei Überlagerung von Wellen mit unterschiedlichen verursacht

$\boxed{S18}$

Dispersion eine zeitabhängige Änderung der Wellenform.

Grund: $v_{ph}(\omega_1) = \qquad = v_{ph}(\omega_2)$ (1)

d.h. Phasenflächen mit unterschiedlichen ω, k "halten nicht miteinander Schritt".

Beispiel: Schwebungswellen

$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

Sei $\xi(z,t) = A\left[\cos(\omega_1 t - k_1 z) + \cos(\omega_2 t - k_2 z)\right]$ (2)

$=$ (3)

Schwebungen (Einhüllende) x schnelle Oszillationen

Frequenz : $\frac{\Delta\omega}{2} =$ $\qquad \bar{\omega} =$ (4)

Wellenvektor : $\frac{\Delta k}{2} =$ $\qquad \bar{k} =$ (5)

Geschwindigkeit : $v =$ $\qquad \bar{v} =$ (6)

Verallgemeinerung: Überlagerung vieler Wellen unterschiedlicher Frequenz

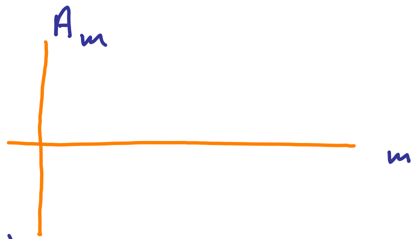
$\boxed{S19}$

Beispiel 1:

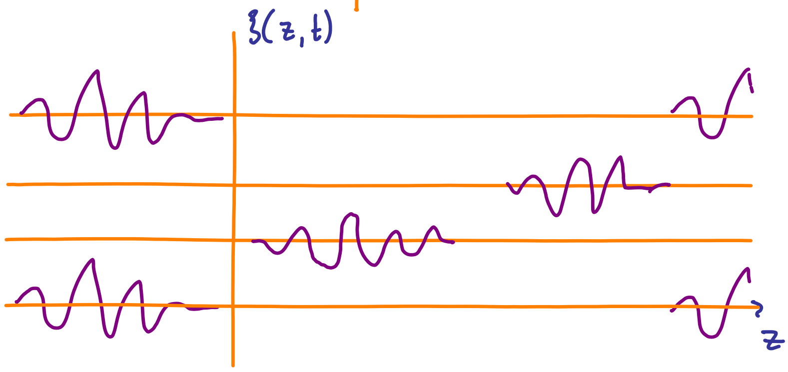
Periodisches Signal: $\xi(z,t) =$

mit $\omega_m =$

$k_m =$



Pulsform wiederholt sich periodisch



Pulsform ändert sich! Wie?!?

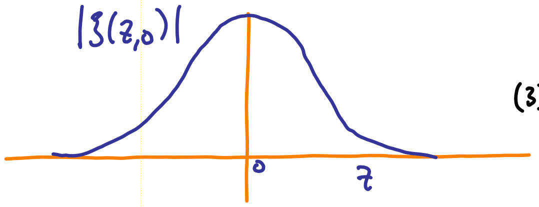
Beispiel 2: Wellenpaket

Annahme: $\tilde{\xi}(k) =$ S20

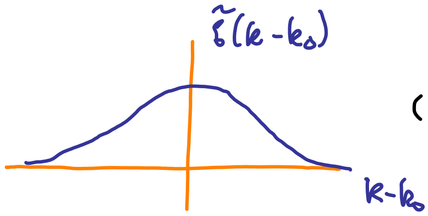
(1)

Sei $\xi(z,0)$ eine gepeakte Funktion $\xi(z,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikz}\, \tilde{\xi}(k-k_0)$

[Nachrechnen!]: (2)



(3)



(4)

mit Zeitabhängigkeit $\xi(z,t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{i(kz \qquad)}\, \tilde{\xi}(k)$ (5)

Wie schnell bewegt der Puls sich? $\Longrightarrow$ "Gruppengeschwindigkeit"

Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets

S21

Wellenpaket: Sei $\xi(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{i[kz - \omega(k)t]}\, \tilde{\xi}(k-k_0)$

sei scharf gepeakt bei

Taylor-Entwicklung der Dispersionsrelation um $k=k_0$: $\omega(k) =$ (2)

$=:$ (3)

$\omega_{ph} =$

(2) in (1): $\xi(z,t) \simeq \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{i[kz - (\qquad)t]}\, \tilde{\xi}(k-k_0)$ (4)

liefert (Phase)x(verschobenen Puls) $= e^{i} \qquad \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ik[\qquad]}\, \tilde{\xi}(k-k_0)$ (5)

$= e^{i(\qquad)}\, |\xi(z-\omega_0' t, 0)|$ (6)

Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} =$; Gruppengeschwindigkeit: $v_g =$