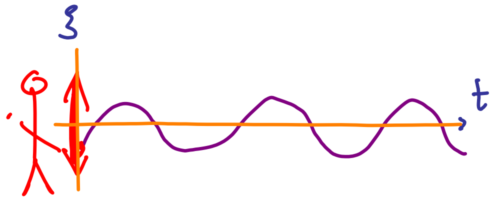
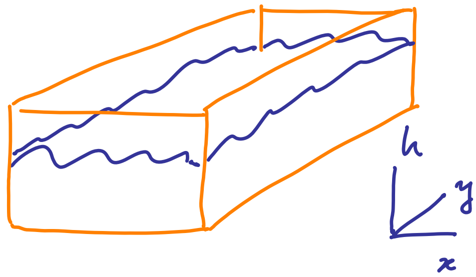
Beispiele von Wellenphänomenen

Skalare Wellen

- in 1D : z.B. geschüttelte Schnur entlang z-Achse $\xi(z,t)$



- in 2D : z.B. Wasserstand im Fischtank : $h(x,y,t)$



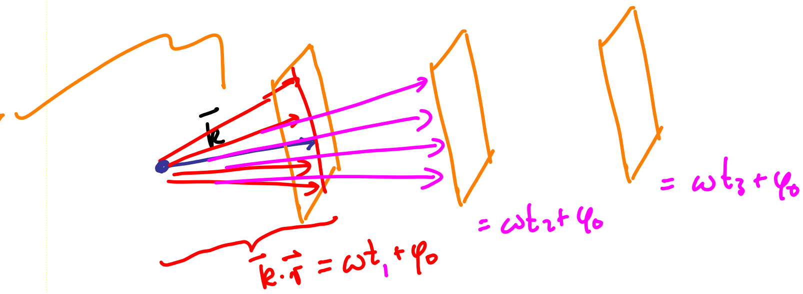
- in 3D : z.B. Druckwelle : $p(x,y,z,t) = p(\vec{r},t)$ (1)

Ebene Welle, in $\vec{k}$-Richtung propagierend : $p(\vec{r},t) = f(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$ (2)

"Phasenfläche" $\equiv$ { Menge aller $\vec{r}$, mit $\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = \varphi_0 = \text{konst.}$ } (1)

$\equiv$ { Menge aller $\vec{r}$, deren Projektion auf $\vec{k}$ gegeben ist durch $\vec{k}\cdot\vec{r} = \omega t + \varphi_0$

Die roten Vektoren haben zu beliebiger gegebenen Zeit t_i alle dieselbe Projektion auf $\vec{k}$:



$t_1 < t_2 < t_3$

Formal: (1) $\equiv$ { Menge aller $\vec{r}$, mit $\vec{r} = \frac{(\omega t + \varphi_0)}{k}\hat{k} + \vec{r}_\perp$ $\left[\begin{array}{l}\text{mit } \vec{k} = k\hat{k} \\ \text{und } \vec{r}_\perp\cdot\vec{k} = 0\end{array}\right]$ } (2)

Check (2) $\overset{?}{=}$ (1) : $\vec{k}\cdot\vec{r} = (\omega t + \varphi_0)\frac{\hat{k}\cdot\cancel{k}\hat{k}}{\cancel{k}} + \underbrace{\vec{r}_\perp\cdot\vec{k}}_{=0} = \omega t + \varphi_0$ ✓ (3)

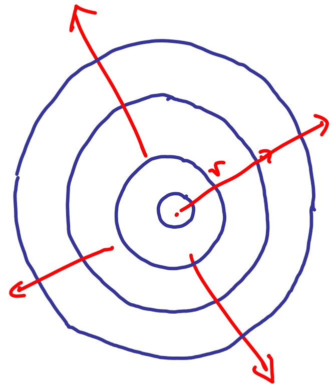
Jeder dieser Punkte bewegt sich mit Geschw: $\vec{v} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} \overset{(2)}{=} \left(\frac{\omega}{k}\right)\hat{k}$ (4)

d.h. Ebene propagiert mit Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$ in $\hat{k}$-Richtung (5)

Beispiel: Ebene Welle mit $\vec{k} = k\hat{z} \overset{(13.2)}{\Longrightarrow} p(\vec{r},t) = f(kz - \omega t)$ (1)

$\Rightarrow$ Phasenfläche $\parallel$ x-y Ebene

Kugelwellen (z.B. Druckwellen)



Beispiel: $p(\vec{r},t) = A \cos(kr \mp \omega t)$ (2)

mit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (3)

Phasenflächen sind konzentrische Schalen

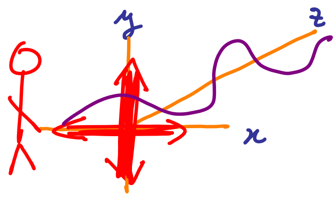
Richtung: Radial auswärts laufend
ein

Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (4)

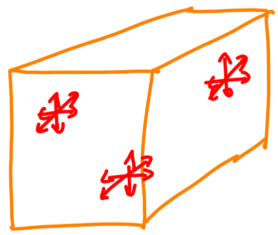
Vektorfeldwellen

2-Komponentig, in 1D: z.B. Schnur, geschüttelt in x- und y-Richtung: Auslenkung $= \hat{x}\cos(k_1 z - \omega_1 t - \varphi_1)$

$+ \hat{y}\cos(k_2 z - \omega_2 t - \varphi_2)$ (1)



3-Komponentig, in 3D: z.B. Luftgeschwindigkeit in Resonator, dessen Wände vibrieren:



"Transversale Welle": $\overrightarrow{\text{Auslenkung}} \perp \overrightarrow{\text{Propagationsrichtung}}$ (2)

"Longitudinale Welle": $\overrightarrow{\text{Auslenkung}} \parallel \overrightarrow{\text{Propagationsrichtung}}$

Zerlegung der Auslenkung $\vec{u}(\vec{r},t)$ nach den 3 Polarisationsrichtungen:

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \sum_{j=1,2,3} A_j \, \hat{e}_j \cos(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega_j t + \varphi_j) \quad (3)$$

516

"Linear polarisierte" Welle: nur eine Polarisierungsrichtung,

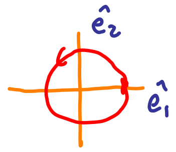
z.B. $\vec{u}(\vec{r},t) = \hat{e}_1 A_1 \cos(\vec{k}_1\cdot\vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1)$ (1)

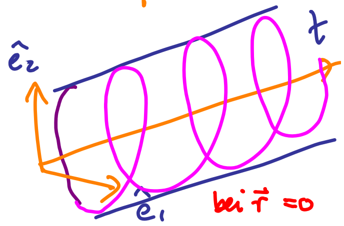
"Elliptisch" polarisierte Welle: zwei Polarisierungsrichtungen

z.B. $$\vec{u}(\vec{r},t) = \hat{e}_1 A_1 \cos(\vec{k}_1\cdot\vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1) + \hat{e}_2 A_2 \cos(\vec{k}_2\cdot\vec{r} - \omega_2 t + \varphi_2) \quad (2)$$

"Zirkular polarisiert:" zwei Polarisierungsrichtungen, 90° phasenverschoben:

z.B. $$\vec{u}(\vec{r},t) = \hat{e}_1 A_1 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) + \hat{e}_2 A_2 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \quad (3)$$





517

Dispersion

Bereits bekannt: Für $\cos(\omega t - kx) = \cos[2\pi(t/\tau - x/\lambda)]$ (1)

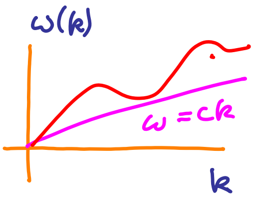
ist Phasengeschw.: $v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \lambda/\tau$ (2)

Falls $v_{ph} \neq const$ sondern von λ abhängt,
dh. falls ω nicht linear von k abhängt
und folglich k nicht linear von ω abhängt

} $\omega \neq ck$ zeigt Welle "Dispersion".

"Dispersionsrelation" gibt diese Abhängigkeiten an:

$$k = k_0\, n(\omega) =: k(\omega) \quad (3)$$
$$\omega = n^{-1}(k/k_0) =: \omega(k) \quad (4)$$



wobei der "Brechungsindex" $n(\omega)$ im allgemeinen frequenzabhängig ist; dann spricht man von "frequenzabhängiger Dispersion".

Für Licht im Vakuum: $v_{ph} = c = \omega/k = const$ $\Rightarrow$ "keine Dispersion". (5)

S18

Bei Überlagerung von Wellen mit unterschiedlichen ω und k verursacht Dispersion eine zeitabhängige Änderung der Wellenform.

$k = k(\omega)$ ist gegebene Funktion.

Grund: $$v_{ph}(\omega_1) = \frac{\omega_1}{k(\omega_1)} \neq \frac{\omega_2}{k(\omega_2)} = v_{ph}(\omega_2) \qquad (1)$$

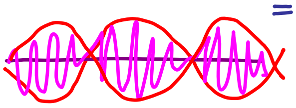
d.h. Phasenflächen mit unterschiedlichen ω, k "halten nicht miteinander Schritt".

Beispiel: Schwebungswellen $\quad k_1 = k(\omega_1) \quad k_2 = k(\omega_2)$

$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$

Sei $$\xi(z,t) = A\left[\cos(\omega_1 t - k_1 z) + \cos(\omega_2 t - k_2 z)\right] \qquad (2)$$

$$= 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} z\right) \cos(\bar{\omega} t - \bar{k} z) \qquad (3)$$



Schwebungen (Einhüllende) x schnelle Oszillationen

Frequenz: $\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \neq \bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ (4)

Wellenvektor: $\frac{\Delta k}{2} = \frac{1}{2}(k_1 - k_2) \neq \bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ (5)

Geschwindigkeit: $v = \Delta\omega / \Delta k \neq \bar{v} = \bar{\omega} / \bar{k}$ (6)

S19

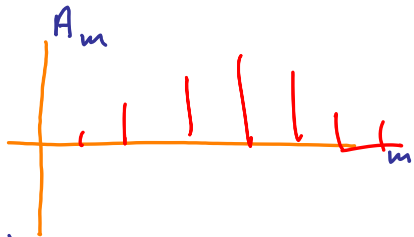
Verallgemeinerung: Überlagerung vieler Wellen unterschiedlicher Frequenz

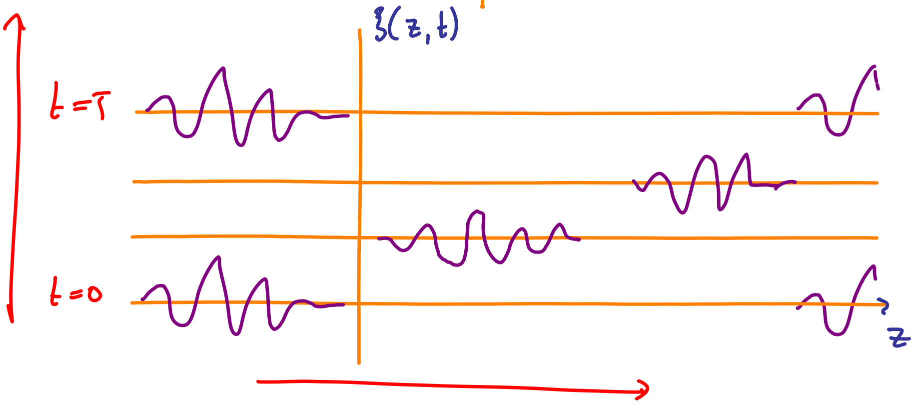
Beispiel 1:

Periodisches Signal: $$\xi(z,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \, e^{-i(\omega_m t - k_m z)} = \xi(z, t+T)$$

mit $\omega_m = 2\pi m / T$

$k_m = k(\omega_m)$





Pulsform wiederholt sich periodisch

Pulsform ändert sich! Wie?!?

Beispiel 2: Wellenpaket $\boxed{\text{S20}}$

Annahme: $\tilde{\xi}(k) = \tilde{\xi}(-k)$ (1)

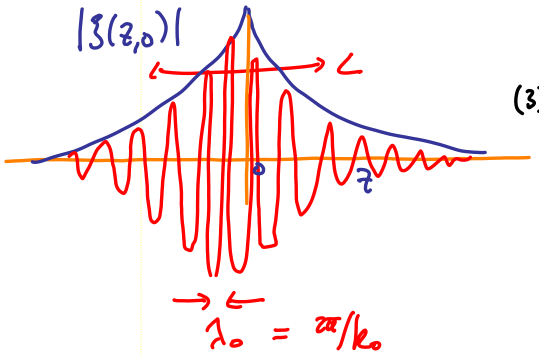
Sei $\xi(z,0)$ eine gepeakte Funktion [Nachrechnen!]:

$$\xi(z,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\, e^{ikz}\,\tilde{\xi}(k-k_0) = e^{ik_0 z}\underbrace{\int\frac{dk}{2\pi}\, e^{ikz}\,\tilde{\xi}(k)}_{|\xi(z,0)|}$$

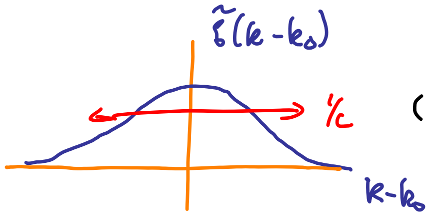
↯

$$e^{-|z|/L}\, e^{ik_0 z}$$

$$\tilde{\xi}(k-k_0) = \frac{2/L}{(k-k_0)^2 + 1/L^2} \qquad (2)$$



(3)

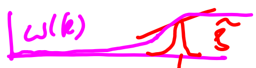


(4)

mit Zeitabhängigkeit
$$\xi(z,t) := e^{ik_0 z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\, e^{i(kz - \omega(k)t)}\,\tilde{\xi}(k) \qquad (5)$$

Wie schnell bewegt der Puls sich? $\Longrightarrow$ "Gruppengeschwindigkeit"

Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets $\boxed{\text{S21}}$



Wellenpaket: Sei
$$\xi(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\, e^{i[kz - \omega(k)t]}\,\tilde{\xi}(k-k_0)$$

sei scharf gepeakt bei $k \simeq k_0$

Taylor-Entwicklung der Dispersionsrelation um $k = k_0$:

deswegen

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k-k_0)\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} + \cancel{O((k-k_0)^2)} \qquad (2)$$

$$=: \omega_0 + (k-k_0)\,\omega_0' = \omega_{ph} + k\omega_0' \qquad (3)$$

$\omega_{ph} = \omega_0 - k_0\omega_0'$

(2) in (1):
$$\xi(z,t) \simeq \int\frac{dk}{2\pi}\, e^{i[kz - (\omega_{ph} + k\omega_0')t]}\,\tilde{\xi}(k-k_0) \qquad (4)$$

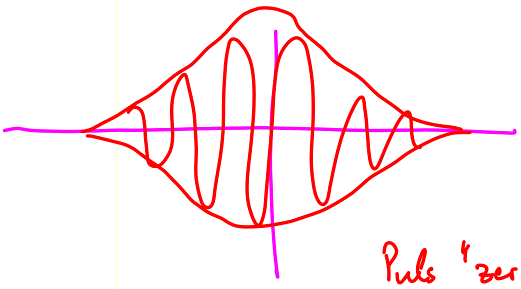
liefert (Phase)×(verschobenen Puls)
$$= e^{-i\omega_{ph}t}\int\frac{dk}{2\pi}\, e^{ik[z-\omega_0' t]}\,\tilde{\xi}(k-k_0) \qquad (5)$$

$$e^{-i(\omega_0 - \cancel{k_0\omega_0'})t}\, e^{ik_0(z - \cancel{\omega_0' t})}\, |\xi(z-\omega_0' t, 0)| \quad \Leftarrow (20.1)$$

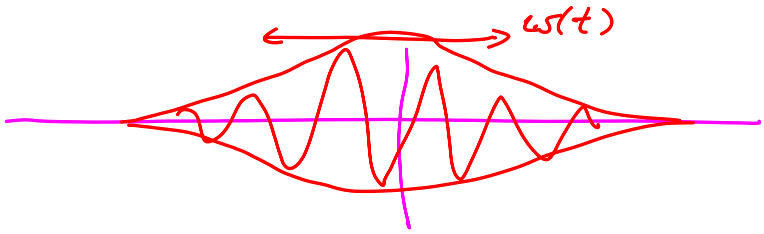
$$= e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)}\, |\xi(z - \omega_0' t, 0)| \qquad (6)$$

Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \dfrac{\omega_0}{k_0}$; $\boxed{\text{Gruppengeschwindigkeit: } v_g = \omega_0' = \left.\dfrac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k_0}}$

$\boxed{S22}$

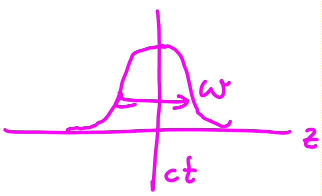


Puls 'zerfließt', falls $\omega(k) \neq ck$



$\boxed{S23}$

Gauss'sches Wellenpaket:



$$\xi(z,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, w}\, e^{-(z-ct)^2/w^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \xi(z,t) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-Az^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi A}} \quad (*)$$

$$\xi(z,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikz}\, \tilde{\xi}(k)$$

$$\tilde{\xi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-ikz}\, \xi(z,0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\, w} \int dz\, e^{-\underbrace{\left[\frac{1}{w^2} z^2 + ikz\right]}_{S(z)}}$$

$$S(z) = \frac{1}{w^2} z^2 + ikz$$

$$= Az^2 + Bz \qquad A = \frac{1}{w^2},$$

$$= A\left(z + \frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{B^2}{4A} \qquad B = ik$$

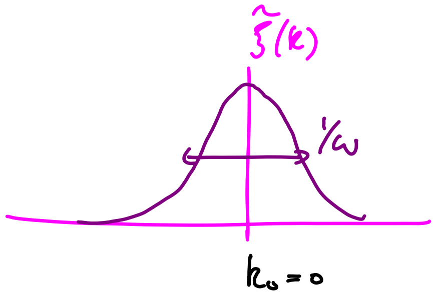
S24

$$\tilde{\xi}(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, w} \underbrace{\int dz\; e^{-A\left(z+\frac{B}{2A}\right)^2}}_{=\sqrt{\pi/A}} \; e^{+B^2/4A}$$

$z \to z' - B/2A$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\, w} \sqrt{\frac{\pi}{A}}\; e^{B^2/4A}$$

$$= e^{-k^2 w^2/4}$$



$$\xi(z,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\; e^{ikz}\; e^{-k^2 w^2/4}$$

$$\xi(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\; e^{ik(z-ct)}\; e^{-k^2 w^2/4}$$

$\uparrow$ für lineare Dispersion, $\omega = ck$.

$= \xi(z-ct, 0) \implies$ d.h. Pulsform ändert sich nicht als Funktion der Zeit.

S25

Betrachte nun: $\omega(k) = ck + ak^2$

$$\xi'(z,t) = \int \frac{dk}{2\pi}\; e^{i(kz-\omega(k)t)}\; e^{-k^2 w^2/4}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi}\; e^{-\underbrace{\left[k^2\left(w^2/4 + iat\right) - ik(z-ct)\right]}_{A'k^2 + B'k \;=\; A'\left(k+\frac{B'}{2A'}\right)^2 - \frac{B'^2}{4A'}}}$$

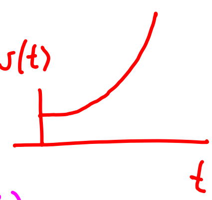
$$A' = \frac{w^2}{4}\left(1 + \frac{4iat}{w^2}\right)$$

$$B' = -i(z-ct)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{A'}}\; e^{B'^2/4A'}$$

$v_g = c$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\left[w^2\left(1+\frac{4iat}{w^2}\right)\right]^{1/2}}\; e^{-\frac{(z-ct)^2}{w^2(1+4iat/w^2)}}$$



$$= \frac{1}{\#}\; e^{-\frac{(z-ct)^2}{w^2(t)}}$$

$$\frac{(z-ct)^2\;(1-4iat/w^2)}{\underbrace{w^2\left(1+(4at/w^2)^2\right)}_{=\,w^2(t)}}$$

Gruppengeschwindigkeit : c warum? denn $\omega(k) \neq ck$?!!

i.A. $$v_g \overset{(21.6)}{=} \left.\frac{\partial \omega(k)}{\partial k}\right|_{k_0} = \left.\frac{\partial}{\partial k}\left(ck + ak^2\right)\right|_{k_0 = 0}$$

$$= \left(c + 2ak\right)\Big|_{k_0 = 0} = c \quad ✓$$

Zum selber rechnen: Betrachte

$$\xi(z,t) = \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{i(kz - \overbrace{\omega(k)}^{ck+ak^2} t)}\, e^{-(k-k_0)^2 w^2/4}$$

$$= ?$$ Wie schnell bewegt Einhüllende sich?

$$(z - c't)^2 \;?$$

Antwort: $c' = v_g = c + 2ak_0$