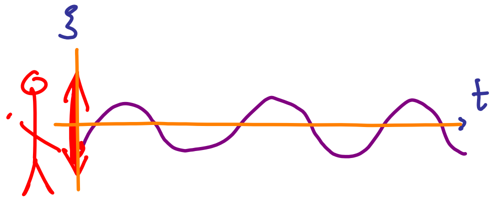
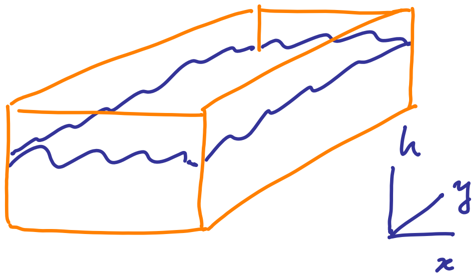
Beispiele von Wellenphänomenen

Skalare Wellen

- in 1D: z.B. geschüttelte Schnur entlang z-Achse $\xi(z,t)$



- in 2D: z.B. Wasserstand im Fischtank: $h(x,y,t)$



- in 3D: z.B. Druckwelle: $p(x,y,z,t) =: p(\vec{r},t)$ (1)

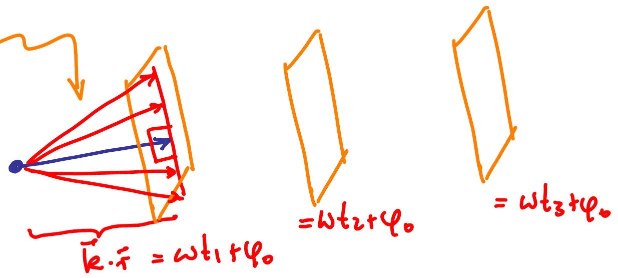
Ebene Welle, in $\vec{k}$-Richtung propagierend: $p(\vec{r},t) = f(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$ (2)

WARUM?

"Phasenfläche" $\equiv$ {Menge aller $\vec{r}$, mit $\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = \varphi_0 = \text{konst.}$} (1)

$\equiv$ {Menge aller $\vec{r}$, deren Projektion auf $\vec{k}$ gegeben ist durch $\vec{k}\cdot\vec{r} = \omega t + \varphi_0$

Die roten Vektoren haben zu beliebiger gegebenen Zeit t_i alle dieselbe Projektion auf $\vec{k}$:



Formal: (1) $\equiv$ $\left\{ \text{Menge aller } \vec{r}, \text{ mit } \vec{r} = \frac{(\omega t + \varphi_0)}{k}\hat{k} + \vec{r}_\perp \quad \left[\begin{array}{l}\text{mit } \vec{k} = k\hat{k} \\ \text{und } \vec{r}_\perp\cdot\vec{k} = 0\end{array}\right]\right\}$ (2)

Check (2) $\stackrel{?}{=}$ (1): $\vec{k}\cdot\vec{r} = \frac{(\omega t + \varphi_0)}{\cancel{k}}\,\hat{k}\cdot\hat{k}\,\cancel{k} = \omega t + \varphi_0$ ✓ (3)

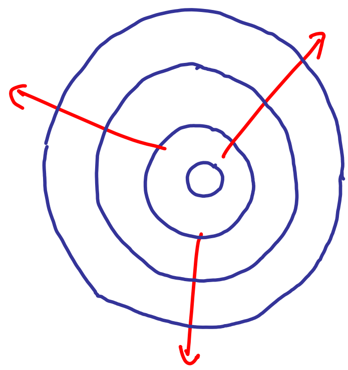
Jeder dieser Punkte bewegt sich mit Geschw.: $\vec{v} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} \stackrel{(2)}{=} \left(\frac{\omega}{k}\right)\hat{k}$ (4)

d.h. Ebene propagiert mit Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$ in $\hat{k}$-Richtung (5)

Beispiel: Ebene Welle mit $\vec{k} = k\hat{z} \xRightarrow{(13.2)} p(\vec{r},t) = f(kz - \omega t)$ (1)

$\Rightarrow$ Phasenfläche in x-y-Ebene

Kugelwellen (z.B. Druckwellen)



Beispiel: $p(\vec{r},t) = A\cos(kr - \omega t)$ (2)

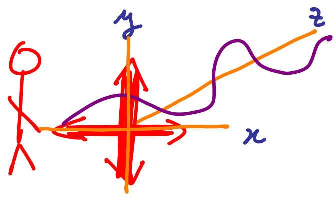
mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (3)

Phasenflächen sind Konzentrische Schalen,

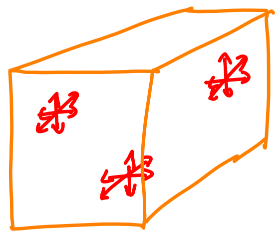
Richtung: Radial auswärts laufend

Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi}{\lambda}$ (4)

Vektorfeldwellen



2-Komponentig, in 1D: z.B. Schnur, geschüttelt in x- und y-Richtung: Auslenkung $= \hat{x}\cos(k_1 z - \omega_1 t - \varphi_1)$
$+ \hat{y}\cos(k_2 z - \omega_2 t - \varphi_2)$ (1)



3-Komponentig, in 3D: z.B. Luftgeschwindigkeit in Resonator, dessen Wände vibrieren:

"Transversale Welle": $\overrightarrow{\text{Auslenkung}} \perp \overrightarrow{\text{Propagationsrichtung}}$ (2)
"Longitudinale Welle": $\overrightarrow{\text{Auslenkung}} \parallel \overrightarrow{\text{Propagationsrichtung}}$

Zerlegung der Auslenkung $\vec{u}(\vec{r},t)$ nach den 3 Polarisationsrichtungen:

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \sum_{j=1,2,3} A_j\, \hat{e}_j \cos(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega_j t + \varphi_j) \quad (3)$$

516

"Linear polarisierte" Welle: nur eine Polarisierungsrichtung,

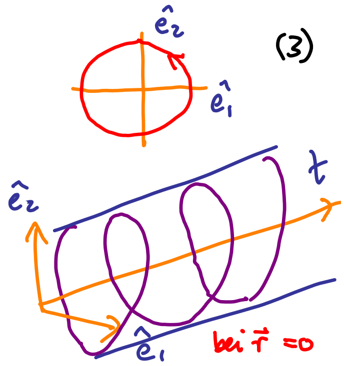
z.B. $\vec{u}(\vec{r},t) = \hat{e}_1 A_1 \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1)$ (1)

"Elliptisch" polarisierte Welle: zwei Polarisierungsrichtungen

z.B. $\vec{u}(\vec{r},t) = \hat{e}_1 A_1 \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1) + \hat{e}_2 A_2 \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t + \varphi_2)$ (2)

"Zirkular polarisiert:" zwei Polarisierungsrichtungen, 90° phasenverschoben:

z.B. $\vec{u}(\vec{r},t) = \hat{e}_1 A_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \hat{e}_2 A_2 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ (3)



Dispersion

517

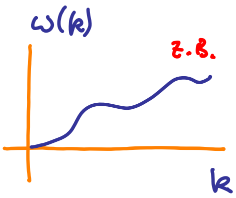
Bereits bekannt: Für $\cos(\omega t - kx) = \cos[2\pi(t/\tau - x/\lambda)]$ (1)

ist Phasengeschw.: $v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{\tau}$ (2)

Falls $v_{ph} \neq$ const, sondern von λ abhängt,
d.h. falls ω nicht linear von k abhängt
und folglich k nicht linear von ω abhängt
} zeigt Welle "Dispersion".

"Dispersionsrelation" gibt diese Abhängigkeiten an:

$$\begin{cases} k = k_0\, n(\omega) =: k(\omega) & (3) \\ \omega = n^{-1}(k/k_0) =: \omega(k) & (4) \end{cases}$$



wobei der "Brechungsindex" $n(\omega)$ im allgemeinen frequenzabhängig ist; dann spricht man von "frequenzabhängiger Dispersion".

Für Licht im Vakuum: $v_{ph} = c = \omega/k = \text{const} \Rightarrow$ "keine Dispersion". (5)

S18

Bei Überlagerung von Wellen mit unterschiedlichen ω und k verursacht Dispersion eine zeitabhängige Änderung der Wellenform.

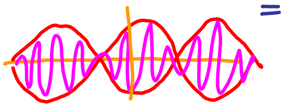
Grund: $$v_{ph}(\omega_1) = \frac{\omega_1(k_1)}{k_1} \neq \frac{\omega_2(k_2)}{k_2} = v_{ph}(\omega_2) \qquad (1)$$

d.h. Phasenflächen mit unterschiedlichen ω, k "halten nicht miteinander Schritt".

Beispiel: Schwebungswellen

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

Sei $$\xi(z,t) = A\left[\cos(\omega_1 t - k_1 z) + \cos(\omega_2 t - k_2 z)\right] \qquad (2)$$



$$= \underbrace{2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right)}_{\text{Schwebungen (Einhüllende)}} \times \underbrace{\cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z)}_{\text{schnelle Oszillationen}} \qquad (3)$$

Frequenz : $\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \neq \bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ (4)

Wellenvektor : $\frac{\Delta k}{2} = \frac{1}{2}(k_1 - k_2) \neq \bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ (5)

Geschwindigkeit : $v = \Delta\bar{\omega}/\Delta\bar{k} \neq \bar{v} = \bar{\omega}/\bar{k}$ (6)

S19

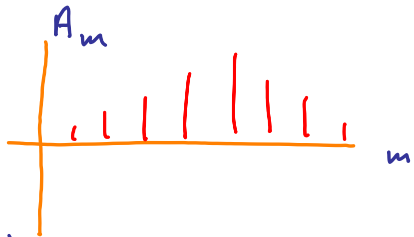
Verallgemeinerung: Überlagerung vieler Wellen unterschiedlicher Frequenz

Beispiel 1:

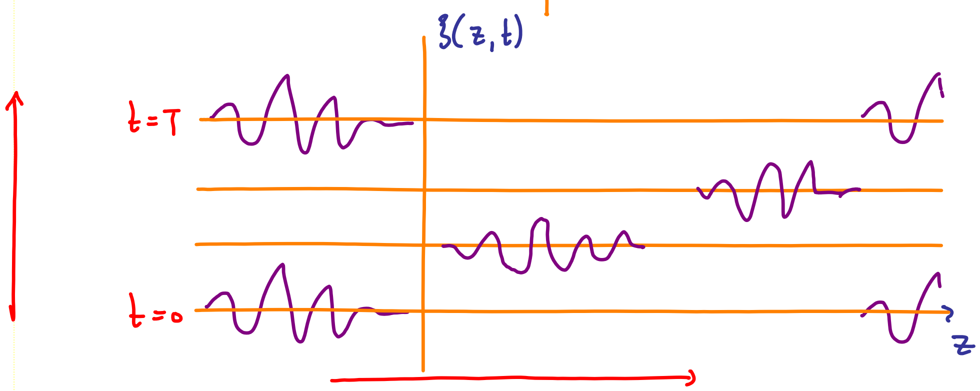
Periodisches Signal: $$\xi(z,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{-i(\omega_m t - k_m z)} = \xi(z, t+T)$$

mit $\omega_m = 2\pi m/T$

$k_m = k_0 n(\omega_m)$



Pulsform wiederholt sich periodisch



Pulsform ändert sich! Wie?!?

Beispiel 2: Wellenpaket

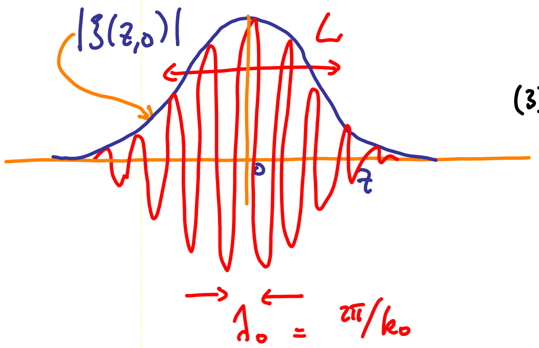
Annahme: $\tilde{\xi}(k) = \tilde{\xi}(-k)$ 1)

Sei $\xi(z,0)$ eine gepeakte Funktion

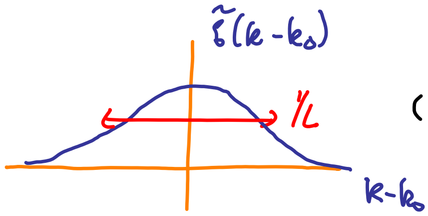
$$\xi(z,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\, e^{ikz}\,\tilde{\xi}(k-k_0) = e^{ik_0z}\underbrace{\int\frac{dk}{2\pi}\, e^{ikz}\,\tilde{\xi}(k)}_{|\xi(z,0)|}$$

[Nachrechnen!]:

$$e^{-|z|/L}\, e^{ik_0z} \qquad\qquad \frac{1/L}{(k-k_0)^2 + 1/L^2} \qquad (2)$$



(3)



(4)

mit Zeitabhängigkeit

$$\xi(z,t) := e^{ik_0z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\, e^{i(kz-\omega(k)t)}\,\tilde{\xi}(k) \qquad (5)$$

Wie schnell bewegt der Puls sich? $\Rightarrow$ "Gruppengeschwindigkeit"

Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets

Wellenpaket: Sei

$$\xi(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\, e^{i[kz-\omega(k)t]}\,\tilde{\xi}(k-k_0)$$

sei scharf gepeakt bei $k \simeq k_0$

Taylor-Entwicklung der Dispersionsrelation um $k=k_0$:

deswegen

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k-k_0)\frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0} + O\left(\cancel{(k-k_0)^2}\right) \qquad (2)$$

$$=: \omega_0 + (k-k_0)\,\omega_0' \equiv \omega_{ph} + k\omega_0' \qquad (3)$$

$\omega_{ph} = \omega_0 - k_0\omega_0'$

(2) in (1):

$$\xi(z,t) \simeq \int\frac{dk}{2\pi}\, e^{i[kz-(\omega_{ph}+k\omega_0')t]}\,\tilde{\xi}(k-k_0) \qquad (4)$$

liefert

(Phase)x(verschobenen Puls)

$$= \underbrace{e^{-i\omega_{ph}t}}_{e^{-i(\omega_0-\cancel{k_0\omega_0'})t}}\;\underbrace{\int\frac{dk}{2\pi}\, e^{ik[z-\omega_0't]}\,\tilde{\xi}(k-k_0)}_{e^{ik_0(z-\cancel{\omega_0't})}\,|\xi(z-\omega_0't,\,0)| \Leftarrow (S.1)} \qquad (5)$$

$$= e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)}\,|\xi(z-\omega_0't,\,0)| \qquad (6)$$

Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}$; $\boxed{\text{Gruppengeschwindigkeit: } v_g = \omega_0' = \frac{\partial\omega}{\partial k}\Big|_{k_0}}$