LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Physik
Jan von Delft, Katharina Stadler, Frauke Schwarz
T0: Rechenmethoden für Physiker, WiSe 2013/14

http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/13t0/

Mathe-Vorkurs,: Funktionen

Lösung Hausaufgabe 1: Induktion (*)

1. Induktionshypothese: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+7+\dots+(2n-1) = n^2$
   Induktionsanfang: $n = 1$:
   $$2\cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$
   Induktionsschritt: $n \to n+1$:
   $$\sum_{k=1}^{n+1} 2k-1 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 \overset{\text{I.H.}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

2. Induktionshypothese: $\sum_{i=1}^{k} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$ und $x \neq 1$
   Induktionsanfang: $k = 0$:
   $$1 = \frac{1-x^1}{1-x} = 1$$
   Induktionsschritt: $n \to n+1$:
   $$\sum_{i=1}^{k+1} x^i = \sum_{i=1}^{k} x^i + x^{k+1} \overset{\text{I.H.}}{=} \frac{1-x^{k+1}}{1-x} + x^{k+1} = \frac{1-x^{k+1}+x^{k+1}-x^{k+2}}{1-x} = \frac{1-x^{k+2}}{1-x}$$

Lösung Hausaufgabe 2: Potenzen (*)

a) $(a^n)^{\frac{-2}{n}} = a^{n\cdot\frac{-2}{n}} = a^{-2}$

b) $b^x \cdot a^{4x} \cdot b^{-5x} = b^{x(1-5)} a^{4x} = \left(\frac{a}{b}\right)^{4x}$

c) $\frac{x^2\cdot x^5}{(x^4)^3} = \frac{x^7}{x^{12}} = x^{-5}$

d) $\frac{a^{-2}\cdot b^3\cdot c}{a\cdot b^{-2}\cdot c^{-1}} = \frac{b^{3+2}c^2}{a^3} = \frac{b^5c^2}{a^3}$

e) $\left(\frac{a\cdot x^2}{y}\right)^2 \cdot \left(\frac{y^2}{a^2\cdot x}\right)^3 = \frac{a^2x^4y^6}{y^2a^6x^3}\frac{xy^4}{a^4}$

f) $\left(\frac{3\cdot y^2}{z}\right)^{-2} = \frac{z^2}{9\cdot y^4}$

g) $\frac{e^{4x+2}}{e^{2x-3}} = e^{4x+2-2x+3} = e^{2x+5}$

h) $e^x e^{2x+1} = e^{3x+1}$

i) $(e^{x+1})^2 = e^{2x+2}$

j) $\left[\left(\frac{a^2 \cdot b^{-1} \cdot c^3}{a^{-1} \cdot b \cdot c^2}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left(\frac{a^3 \cdot c}{b^2}\right)^2 = \frac{a^6 \cdot c^2}{b^4}$

k) $\left[\left(\frac{3^{-2} \cdot x^{-2} \cdot y^2}{5^{-5} \cdot x^{-2} \cdot y^5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3^{-1} \cdot x^{-3} \cdot y^{-2}}{5^{-2} \cdot x^{-2} \cdot y^{-1}}\right)^2\right]^2 = (5^{-5}3^2 \cdot y^3)^2 \cdot \left(\frac{5^2}{3 \cdot x \cdot y}\right)^4 = \frac{y^2}{x^4 5^2}$

Lösung Hausaufgabe 3: Logarithmengesetze (*)

a) falsch, ln is nicht linear ($\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$)

b) richtig

c) richtig

d) falsch

e) richtig

f) falsch, $\ln a / \ln b \neq \ln(a/b)$

Lösung Hausaufgabe 4: Logarithmengleichungen (*)

a) $x = 2^{-3}$

b) $x = 10^{1,5} = 10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1000}$

c) $e^{-1} = x$

d) $x^2 = 121 \Rightarrow x = 11$

e) $\log_2 7 = x$

f) $x = 10^{27,3}$

g) $x = e^{8,65133}$

h) Benutze $\log_2$: $x = 2x + 4 \Rightarrow x = -4$

i) $3^2 = x + 4 \Rightarrow x = 5$

j) $5^{x+2} = 5^{3(2-x)} \Rightarrow x + 2 = 6 - 3x \Rightarrow x = 1$

k) $2^{x+2} = 2^4 \Rightarrow x = 2$

l) $2^8 = x - 4 \Rightarrow x = 4 + 2^8$

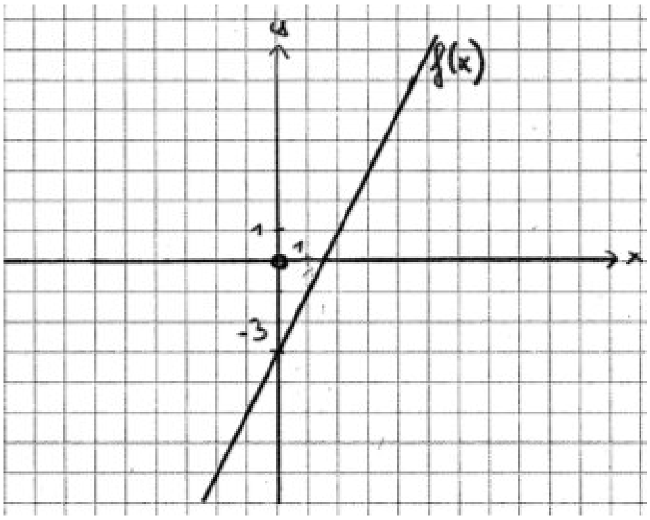
Lösung Hausaufgabe 5: Lineare Funktionen (*)

1. $y = \frac{10-7}{8-3}x + t$, setze $x = 8$ ein zur Bestimmung von t: $10 = \frac{3}{5} \cdot 8 + t \Rightarrow t = 10 - \frac{24}{5} = 5\frac{1}{5}$.
   Berechne $y(5) = \frac{3}{5} \cdot 5 + 5\frac{1}{5} = 8\frac{1}{5}$ und $y(x) = \frac{3}{5}x + 5\frac{1}{5} \stackrel{!}{=} 6 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{3}$.

2. $y = \frac{9-5{,}5}{6{,}5-4}x + t = \frac{7}{5}x + t$ Benutze $y(4) = 1{,}4 \cdot 4 + t = 5{,}5 \Rightarrow t = -0{,}1$.
   Berechne nun $y(5) = 1{,}4 \cdot 5 - 0{,}1 = 6{,}9$ und $y(x) = 1{,}4x - 0{,}1 \stackrel{!}{=} 6 \Rightarrow x = 6{,}1/1{,}4$.

Lösung Hausaufgabe 6: Lineare Funktionen (*)

a) $m = \frac{1+4}{-2-3} = -\frac{5}{5} = -1$ ist die Steigung der Gerade, t bestimmt man durch einsetzen zu -1. Die Geradengleichung ist demnach $y = -1 \cdot x - 1$.
   $x = 0$ einsetzen ergibt den y-Achsen-Schnittpunkt $y = -1$ und Auflösen von $y = 0 = -1 \cdot x - 1$ ergibt den x-Achsen-Schnittpunkt $x = -1$.

b) 

c) $m = -3{,}1 = \frac{y_2+0{,}12}{1{,}3-0{,}5} \Rightarrow -3{,}1 \cdot 0{,}8 - 0{,}12 = -2{,}6 = y_2$

Lösung Hausaufgabe 7: Umkehrfunktionen (*)

1. $y = \log x \iff 10^y = x \Rightarrow f^{-1}(x) = 10^x$
2. $y = \log_2(x^2),\ x > 0 \Rightarrow 2^y = 2^{\log_2 x^2} \Rightarrow x^2 = 2^y \Rightarrow f^{-1}(x) = 2^{0{,}5x}$
3. $y = 2^x \Rightarrow \log_2 y = \log_2 2^x = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 x$
4. $y = 5^{2x} \Rightarrow \log_5 y = \log_5 5^{2x} \Rightarrow 2x = \log_5 y \Rightarrow x = \frac{\log_5 y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\log_5 x$

Lösung Hausaufgabe 8: Exponential- und Logarithmusfunktionen (*)

1. $$y = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1+(x/2)^2}\right) \iff e^y = \frac{x}{a} + \sqrt{1+(x/2)^2}$$
$$\iff \left(e^y - \frac{x}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2$$
$$\iff e^{2y} - 2e^y\frac{x}{a} + (x/a)^2 = 1 + (x/a)^2$$
$$\iff e^{2y} - 1 = 2e^y x/a$$
$$\iff \frac{a(e^{2y} - 1}{2e^y} = x$$
$$\iff x = a\sinh y$$

2. $y = \ln(x/a + \sqrt{(x/a)^2 - 1}) \iff (e^y - x/a)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1$

$$\iff e^{2y} - 2e^y\frac{x}{a} + (x/a)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1$$

$$\iff e^{2y} + 1 = 2e^y\frac{x}{a}$$

$$\iff \frac{a}{2}\left(e^y + e^{-y}\right) = x$$

$$\Rightarrow x = a\cosh y$$

3. $y = -\omega\ln(1 - kx) \iff e^{\frac{-y}{\omega}} = 1 - kx \iff \frac{1-e^{-\frac{y}{\omega}}}{k} = x$