http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/13t0/

Mathe-Vorkurs,: Funktionen

Lösung Hausaufgabe 1: Nullstellen (*)

$$
\begin{aligned}
a) \quad & 0 = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^2 = x(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x) \Rightarrow x_1 = 0 \text{ and } x_2 = -\frac{3}{4} \\
b) \quad & 0 = x^3(2x^2 - 8) = x^3(x-2)(x+2) \\
c) \quad & \text{Substituiere mit } z = x^2, \text{dann gilt:} 0 = 16z^2 - 40x + 9, \\
& \text{hat Lösungen } z_1 = \frac{9}{4} \text{ und } z_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}, x_{3,4} = \pm\frac{1}{2} \\
d) \quad & \frac{1}{2} = \cos(1+x), \cos y = \frac{1}{2} \text{ bei } y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \text{ mit } n \in \mathbb{Z}, \text{ also } x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n - 1
\end{aligned}
$$

Lösung Hausaufgabe 2: Trigonometrische Funktionen (*)

1. $\sin(\alpha) = 1/2$ und $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Längen entsprechend.
2. $\sin(\alpha) \simeq 0,8835$ und $\tan(\alpha) = 1,8862$ ebenso.
3. $\tan(\alpha) = \frac{5}{7} \Rightarrow \alpha = 0,62024\text{rad}$, etwa $35,54$Grad und $\tan(\alpha) = \frac{7}{5} \Rightarrow \alpha = 0,95054\text{rad}$, etwa $54,46$ Grad

Lösung Hausaufgabe 3: Grenzwerte (*)

a) 2197

b) $-\frac{1}{2}$

c) 1

d) $-\frac{3}{4}$

e) $\frac{1}{4}$

f) 40

g) $\frac{1}{6}$

h) $\frac{2}{5}$

i) $-\frac{1}{2}$

j) siehe unten

k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to 0} \cos x = 1$

l) $\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{x^2+x-2}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0}} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{2x} = \frac{3}{2}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\overbrace{1-\cos 3x}^{\to 0}}{\underbrace{1-\cos x}_{\to 0}} \overset{\text{L.H.}}{=} \frac{\overbrace{3\sin 3x}^{\to 0}}{\underbrace{\sin x}_{\to 0}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{9\cos 3x}{\cos x} = 9$

n) $\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{x}^{\to\infty}}{\underbrace{e^x}_{\to\infty}} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

o) $\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{x}^{\to\infty}}{\underbrace{\ln^x}_{\to\infty}} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$

p) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to 0}}{\underbrace{x-1}_{\to\infty}} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} 1$

q) siehe unten

r) $\lim_{x\to 0} \left(\underbrace{x}_{0} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to\infty}} \overset{\text{L'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$

s) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\underbrace{e^x-1}_{\infty}} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1-e^x}^{0}}{\underbrace{e^x-1+xe^x}_{0}} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{e^x+xe^x+e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2+x} = -\frac{1}{2}$

t) $\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^0 = 1$ wobei $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$

u) $\lim x_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e$

v) $\lim_{x\to\pm\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^0 = 1$

zu j) $$\lim_{x\to\infty} (\underbrace{-3x}_{\to -\infty} + \underbrace{\sqrt{9x^2+4x-5}}_{\to +\infty}) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{9x^2+6x-5}-3x)(\sqrt{9x^2+4x-5}+3x}{\sqrt{9x^2+4x-5}+3x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2+4x-5-9x^2}{\sqrt{9x^2+4x-5}+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x-5}{\sqrt{9x^2+4x-5}+3x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4-\frac{5}{x}}{\sqrt{9+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}+3} = \frac{4}{3+3} = \frac{2}{3}$$

Lösung Hausaufgabe 4: Stetigkeit (*)

a) $f(x) = |x|$ also $f(0) = |0| = 0$ $\quad \lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$ und $\lim_{x\to 0^-} = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$. Zusammen gilt also $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ also ist die Funktion in $x_0 = 0 \in \mathbb{D}_f$ stetig.

b) $\lim_{x\to 1^-} 2x+3 = 5$ also haben wir linksseitige Stetigkeit. $\lim_{x\to 1^+} 3x+1 = 4$, aber $f(1) = 5$, folglich haben wir keine rechtsseitige Stetigkeit. Insgesamt ist $f(x)$ also an der Stelle $x_0 = 1$ nicht stetig.

c) $\lim_{x\to 0^+} 1 = 1$ und $f(0) = 1$ also rechtsseitig stetig, aber $\lim_{x\to 0^-} 0 = 0$ also nicht linksstetig. udn damit nicht stetig in $x_0 = 0$.

d) $\lim_{x\to 2^-} 4x - 7 = 1 = f(2) = \lim_{x\to 2^+} x^2 - 4x + 5$ damit links- und rechtsseitig stetig und insgesamt stetig an der Stelle $x_0 = 2$.

e) $\lim_{x\to 1^+} = \sqrt{1} = 1 = f(1) = \lim_{x\to 1^-} x^2$ also $f(x)$ stetig an der Stelle $x_0 = 1$.

f) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{1} = 2 \neq 1 = f(1)$, also nicht rechtsseitig stetig und wegen $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ auch nicht linksseitig stetig. $f(x)$ ist somit an $x_0 = 1$ nicht stetig.
Wichtig: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \neq x+1$. Die rechte Seite ist klar stetig. Sie unterscheidet sich nur durch den Definitionsbereich von $f(x)$.

g) $\lim \frac{2x^2-x-3}{x+1} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to -1^+} \frac{4x-1}{1} = -5 = f(-1)$ also rechtsstetig. Ebenso gilt linksseitige Stetigkeit (und ergo Stetigkeit in $x_0 = -1$) wegen $\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2-x-3}{x+1} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to -1^-} \frac{4x-1}{1} = -5$.
Auch hier gilt: $f(x) = \frac{2x^2-x-3}{x+1} = \frac{(2x-3)(x+1)}{x+1} \neq 2x-3$

h) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ und $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ es gilt $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, somit ist x_0 eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

i) $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$ und $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ also wieder ein Pol mit VZ-Wechsel bei $x_0 = 1$.

j) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}, \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{2x+2}{2x-3} = 6 = \lim_{x\to 2^+} f(x)$ aber $2 \notin \mathbb{D}$ also ist $x_0 = 2$ eine hebbare Definitionslcke. Bei $\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x+4}{x-1} = \infty$ also divergiert $f(x)$ bei $x_1 = 1$.

k) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1; -1\}$, sei $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+1}, & x \neq \pm 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$ mit $\mathbb{D}_{\tilde{f}} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Jetzt gilt $\lim_{x\to 1^\pm} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$, also ist $x_2 = 1$ hebbare Definitionslcke, da $x_2 \in \mathbb{D}_{\tilde{f}}$. Andererseits gilt: $\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$ und $\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = \infty$ also ist $x_1 = -1$ eine Polstelle mit VZW.

l) $f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+1} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2}$. Betrachte $\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x-1} = \infty$ und $\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{x-1} = -\infty$. Damit ist $x_0 = 1$ eine Polstelle mit VZW.

m) $f(x) = \frac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)}$. Definiere $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^3+8}, & x \neq 2 \\ \frac{1}{12}, & x \neq -2 \end{cases}$, dann ist $\mathbb{D}_{\tilde{f}} = \mathbb{R}$. Zudem ist $\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x^2-2x+4} = \frac{1}{12} = \lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x^2-2x+4}$, also ist $\tilde{f}(x)$ definiert auf ganz $\mathbb{R}$ und ist stetig an der Stelle $x_0 = -2$, also ist x_0 hebbare Unstetigkeit.

n) $\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{(x+2)^2} = \infty = \lim_{x\to -2^-} \frac{1}{(x+2)^2}$, also ist $x_0 = -2$ eine Polstelle ohne VZW.

Lösung Hausaufgabe 5: Ableitungen (*)

a) $f'(x) = \frac{3}{5}x^2 + 6x - 1$

b) $f'(x) = \frac{1}{4\cdot\sqrt{\frac{1}{2}x}}$

c) $f'(x) = 4x - 6$

d) $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

e) $f'(x) = abx^{b-1}$

f) $f'(x) = \frac{12}{x^5}$

g) $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

h) $f'(x) = 2x - 2^x \ln 2 + \frac{1}{x \ln 10}$

i) $f'(x) = x^{-\frac{2}{3}} + x^{-5} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x^5}$

j) $f'(x) = 18x(3x+1) + 3(9x^2 - 2) = 81x^2 + 18x - 6$

k) $f'(x) = (21x^2 - 6x)(\ln x - 4x) + (7x^2 - 3x^2)(\frac{1}{x} - 4) = 21x^2 \ln x - 6x \ln x - 112x^3 + 43x^2 - 3x$

l) $f'(x) = a(cx^2) + (ax - b)2cx = acx^2 + 2acx^2 - 2bcx = 3acx^2 - 2bcx$

m) $f'(x) = -3(1+x)(x+2) + (2-3x)(x+2) + (2-3x)(1+x) = -9x^2 - 14x$

n) $f'(x) = e^x(5x-3) + 5e^x = 5xe^x + 2e^x$

o) $f'(x) = 2 - \frac{4}{x^2}$

p) $f'(x) = f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$

q) $f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$

r) $f'(x) = \dfrac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

s)
$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2(\tan x)(\sin x - \cos x) + x^3\frac{1}{\cos^2 x}(\sin x - \cos x) + x^3(\tan x)(\cos x + \sin x) \\
&= x^2 \tan x\,[3\sin x - 3\cos x + x\cos x + x\sin x] + \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)x^3 \\
&= x^2 \tan x\,[\sin x(3+x) + \cos x(-3+x)] + \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x}\right)x^3 \\
&= x^2\frac{\sin^2 x}{\cos x}(3+x) + x^2(-3+x)\sin x + x^3\frac{\sin x}{\cos^2 x} - x^3\frac{1}{\cos x}
\end{aligned}$$

t) $f'(x) = \dfrac{4(x+5) - 4x}{(x+5)^2} = \dfrac{20}{(x+5)^2}$

u) $f'(x) = \dfrac{(x+1)2 - (2x-3)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x + 2 - 2x + 3}{(x+1)^2} = \dfrac{5}{(x+1)^2}$

v) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

w) $f'(x) = \dfrac{2ax(cx+d) - (ax^2+b)c}{(cx+d)^2} = \dfrac{2acx^2 + 2adx - acx^2 - bc}{(cx+d)^2} = \dfrac{acx^2 + 2adx - bc}{(cx+d)^2}$

x) $f'(x) = \dfrac{(\ln x - \sin x + x^{-2})(e^x - \sin x - \frac{1}{2\sqrt{x}}) - (e^x + \cos x + \sqrt{x})(\frac{1}{x} - \cos x - 2x^{-3})}{(\ln x - \sin x + x^{-2})^2}$

y) $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(cx + dx^{-1})(a - \frac{b}{x^2}) - (ax + bx^{-1})(c - \frac{d}{x^2})}{(cx + dx^{-1})^2} \\ &= \frac{acx + adx^{-1} - bcx^{-1} - bdx^{-3} - acx + adx^{-1} - bcx^{-1} + bdx^{-3}}{(cx + bx^{-1})^2} \\ &= \frac{2adx^{-1} - 2bcx^{-1}}{(cx + bx^{-1})^2} \\ &= \frac{2(ad - bc)}{x(cx + bx^{-1})^2} \end{aligned}$$

z) $f'(x) = \dfrac{\sin x e^x - e^x \cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$

$\alpha)\quad f'(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$

$\beta)\quad f'(x) = 3(3x^2-13)^2 \cdot 6x = 18x(3x^2-13)^2$

$\gamma)\quad f'(x) = 2x + 4$

$\delta)\quad f'(x) = \dfrac{1}{2}(6x^3-3x+2)^{-\frac{1}{2}}(18x^2-3) = \dfrac{18x^2-3}{2\sqrt{6x^3-3x+2}}$

$\epsilon)\quad f'(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}(-x)$

$\zeta)\quad f'(x) = -\sin(5x^4-3x^2+2)(20x^2-6x)$

$\eta)\quad f'(x) = 4a(ax+b)^3$

$\theta)\quad f'(x) = 3\cos 3x$

$\nu)\quad f'(x) = \sin(\omega x+\alpha) + x\cdot\omega\cdot\cos(\omega x+\alpha)$

$\kappa)\quad f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\lambda)\quad f'(x) = 2\sin(3x)\cdot\cos(3x)\cdot 3 = 6\sin(3x)\cos(3x)$

$\mu)\quad f'(x) = e^{1-x^2}(-2x) = -2xe^{1-x^2}$

$\nu)$ siehe unten.

$\xi)\quad f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$o)\quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{\ln x}{x^2}}}\dfrac{x^2\frac{1}{x} - \ln x\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{1-2\ln x}{2\sqrt{lnx}\cdot x^2}$

$\pi)$ siehe unten.

$\rho)\quad f'(x) = \dfrac{2}{3}(x^2-6)^{-\frac{1}{3}}2x = \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-6}}$

$\sigma)\quad f'(x) = \ln(3x^2) + x\dfrac{1}{3x^2}6x = \ln(3x^2) + 2$

$\tau)$ siehe unten.

$\upsilon)$ siehe unten.

$\phi)\quad f'(x) = \dfrac{1}{2}e^x - \dfrac{1}{2}e^{-x} = \sinh(x)$

$\chi)\quad f'(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$

$$\psi)\quad f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{4\cosh^2 x - 4\sinh^2 x}{4\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\omega)\quad f'(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) := \ln(g(x))$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{\cdot}-x}{\sqrt{\cdot}+x}\cdot\frac{\sqrt{\cdot}+x}{\sqrt{\cdot}+x} = \frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{\cdot}+x\right)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{\cdot}+x\right)^2} = \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{-2}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2\cdot\left(-2\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^3}\cdot\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1\right)\right)\\
&= \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{-2x}{\sqrt{x^2+1}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}\\
&= \frac{-2\sqrt{x^2+1}-2x}{\sqrt{x^2+1}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}\\
&= \frac{-2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}\\
&= \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

$$\text{zu }\nu)\quad \begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{3}x^3+x^{-1}\right)+\sqrt{x}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^3}{6\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\sqrt{x}x^2-\frac{\sqrt{x}}{x^2}\\
&= \frac{x^3\sqrt{x}}{6x}+\frac{\sqrt{x}}{2x^2}+\sqrt{x}x^2-\frac{\sqrt{x}}{x^2} = \sqrt{x}\left(\frac{x^2}{6}+\frac{1}{2x^2}+x^2-\frac{1}{x^2}\right) = \sqrt{x}\left(\frac{7}{6}x^2-\frac{1}{2x^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\text{zu }\pi)\quad f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}\quad u'(x) = -\cos(-x)+x^3\cos(-x)-3x^2\sin(-x)\quad v'(x)=2x$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2+12)(-\cos(-x)+x^3\cos(-x)-3x^2\sin(-x))-\sin(-x)(1-x^3)2x}{(x^2+12)^2}\\
&= \frac{\cos(-x)\left(x^5+12x^3-x^2-12\right)+\sin(-x)\left(-x^4-36x^2-2x\right)}{(x^2+12)^2}
\end{aligned}$$

$$\text{zu }\tau)\quad f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}\quad u'(x) = (12x^3-2x^2+8x)\cos(x^2)+(12x-1)\sin(x^2)\quad v'(x) = e^{3x^2+2x}\cdot(6x+2)$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \Big(e^{3x^2+2x}\left((12x^3-2x^2+8x)\cos(x^2)+(12x-1)\sin(x^2)\right)-\\
&\quad -e^{3x^3+2x}(6x+2)\left((12x^3-2x^2+8x)\cos(x^2)+(12x-1)\sin(x^2)\right)\Big)\left(e^{6x^2+2x}\right)^{-1}\\
&= \frac{(12x^3-x^2+8x)\cos(x^2)+(-36x^3-6x^2-10x-9)\cdot\sin(x^2)}{e^{3x^2+2x}}
\end{aligned}$$

$$\text{zu }\upsilon)\quad \begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\left(2x^2-a\right)^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\left(2x^2-a\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot 4x = \frac{\sqrt[4]{2x^2-a}}{2\sqrt{x}}+\frac{4x\cdot\sqrt{x}}{4\sqrt[4]{(2x^2-a)^3}}\\
&= \frac{\sqrt[4]{2x^2-a}}{2\sqrt{x}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{(2x^2-a)^3}}
\end{aligned}$$