Mathe-Vorkurs, Blatt 04: Vektoren, komplexe Zahlen

Lösung Hausaufgabe 1: Skalar- und Vektorprodukt (*)

a) $x \cdot y = 3 * 9 + 1 * 3 + 2 * 6 = 27 + 3 + 12 = 42$

b) $x \cdot x = 3 * 3 + 1 * 1 + 2 * 2 = 14 = |x|^2$

c) $y \cdot z = 9 * 2 + 6 * 0 + 6 * (-3) = 0$

d) $x \times x = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 3*2-3*2 \\ 3*1-3*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, bedeutet nur, dass kollineare Vektoren Vektorprodukt 0 haben.

e) $x \times z = \begin{pmatrix} -3-0 \\ -4-3*(-3) \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

f) $y \times z = \begin{pmatrix} -9 \\ 12+27 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 39 \\ -6 \end{pmatrix}$

g) $\sphericalangle(x, y) = 0$, da $y = 3 \cdot x$

i) $\sphericalangle(y, z) = \cos^{-1}\left(\frac{y \cdot z}{|y||z|}\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

h) $\sphericalangle(x, z) = \cos^{-1}\left(\frac{x \cdot z}{|y||z|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3y \cdot z}{|y||z|}\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

Lösung Hausaufgabe 2: Skalarprodukt (*)

$x \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + 2b \stackrel{!}{=} 2$, daher ist die Lösung $\begin{pmatrix} a \\ 1-\frac{a}{2} \end{pmatrix}$. Im anderen Fall gilt: $a + 2b + 3c \stackrel{!}{=} 2$ also ist eine Parametrisierung der Lösung $\begin{pmatrix} 2-2b+3c \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Lösung Hausaufgabe 3: Komplexe Zahlen (*)

a) $z_1 + z_2 = 4 - 2i$

b) $z_1 \cdot z_2 = -32 - 17i$

c) $z_1 \cdot z_1 = -16 + 30i$

d) $\bar{z}_1 = 3 - 5i$

e) $z_1 \cdot \bar{z}_1 = 9 + 24 = 34$

f) $|z_1| = z_1 \cdot \bar{z}_1 = 34$

g) $\Re(z_1) = 3$

h) $\Im(z_1) = 5$

i) $\left|e^{i\Re(z_1)}\right|^2 = 1$

j) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Lösung Hausaufgabe 4: Vektorraum der stetigen Funktionen (*)

a) Wohldefiniertheit von „+“: Seien $f, g \in V$: Die Komposition von stetigen Funktionen ist stetig und „+“ ist stetig, also ist $f + g \in V$ klar.

Assoziativität von „+“: Seien $f, g, h \in V$:

$$(f+(g+h))(x) = f(x)+(g+h)(x) = f(x)+g(x)+h(x) = (f+g)(x)+h(x) = ((f+g)+h)(x)$$

- Neutrales Element für „+“: $0 : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ ist klar stetig, also $\in V$ und $\forall f \in V : 0 + f = f$
- Inverses Element für „+“: Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R} \in V$, dann ist klar, dass $-f : [0,1] \to \mathbb{R} \in V$ und klar $f + (-f) = 0$
- Kommutativität von „+“: Sei $f, g \in V$ dann ist $f(x)+g(x) = g(x)+f(x) \quad \forall x \in [0,1]$, also $f + g = g + f$
- Wohldefiniertheit von „$\cdot$“ folgt wieder aus Stetigkeit der Skalarmultiplikation und der Komposition stetiger Funktionen.
- Assozitativität von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, v \in V$: $(\alpha\cdot(\beta\cdot v)) = \alpha(\beta v(x)) = (\alpha*\beta)v(x) = (\alpha*\beta\cdot v)(x)$
- Distributivität: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in V$

$$(\alpha \cdot (f+g)) = (\alpha \cdot f)(x) + (\alpha \cdot g)(x) \quad (\alpha + \beta) \cdot f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$$

- Existenz des Einselements fr „$\cdot$“: $1 \in \mathbb{R}$ und $\forall f \in V : (1 \cdot f)(x) = l \cdot f(x) = f(x)$

Also wissen wir das V einen Vektorraum bildet.

b) Linearität folgt aus der Linearität des Integral, Symmetrie ist offensichtlich. Das Skalarprodukt ist positiv definit: $\langle f, f \rangle = \int dx_0^1 f^2(x) > 0$ falls $f \neq 0$.