Mathematischer Vorkurs – Jan von Delft 30.9.13 ①

1. Funktionen

1.1 Zahlen

- natürliche Zahlen : $\mathbb{N}_0$: 0, 1, 2, 3, ...
  $\mathbb{N}$: 1, 2, 3, ...
- ganzen Zahlen : $\mathbb{Z}$: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
- rationale Zahlen: $\mathbb{Q}$: $q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$

andere Darstellungen: Dezimalbruch (entweder endlich, oder irgendwann periodisch)

②

$0,1010010001000001\ldots \notin \mathbb{Q}$

- reellen Zahlen : $\mathbb{R}$ Jede reelle Zahl läßt sich durch eine Folge von rationalen Zahlen approximieren:

z.B.: $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$

$$\simeq \underset{\overset{\shortparallel}{q_1}}{\frac{14}{10}} = 1.4, \quad \underset{\overset{\shortparallel}{q_2}}{\frac{141}{100}} = 1.41, \quad \underset{\overset{\shortparallel}{q_3}}{\frac{1414}{1000}} = 1.414,$$

Folge: $q_1, \quad q_2, \quad q_3$

$\pi = 3,1415\ldots$, $e = 2,73\ldots$

- komplexe Zahlen: $\mathbb{C}$: Menge aller Zahlen der Form $a + ib$
  $a, b \in \mathbb{R}$, $i \equiv \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

Mathematische Induktion

③

Beispiel: $S(N) = \sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + 3 + \ldots + N$

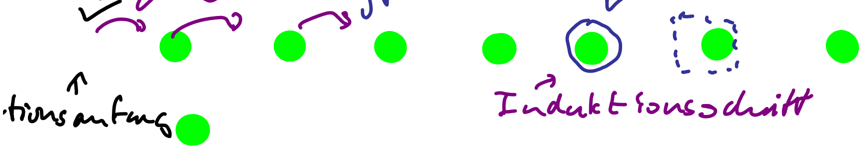
$S(6) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 7 + 7 + 7$

$= 3 \cdot 7 = \frac{N}{2} \cdot (1 + N)$

$S(5) = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 5 + 5 + 5$

$= 3 \cdot 5 = \left(\frac{N+1}{2}\right) \cdot N$

Induktions-Hypothese: $S(N) \overset{?}{=} \frac{N}{2} \cdot (N+1)$



Beweis per Induktion:

④

Gegeben: Ausdruck: $S(N) = \sum_{n=1}^{N} n$ (1)

Induktionshypothese (IH): $S(N) = \frac{N}{2} \cdot (N+1)$ (2)

Induktionsanfang: $S(1) \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{1} n = 1 \underset{(2)}{\overset{?}{=}} \frac{1}{2}(1+1) = 1$ (3)

Induktionsschritt: nehme an, IH gilt für N,

zeige, dass sie auch gilt für $N+1$, d.h., daß $S(N+1) \overset{?}{=} \frac{(N+1)}{2}(N+1+1)$

$S(N+1) \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{N+1} n = \sum_{n=1}^{N} n + (N+1) \overset{IH(2)}{=} \frac{N}{2}(N+1) + (N+1)$

(umformen)
(massieren)

$= (N+1)\left[\frac{1}{2}N + 1\right] = (N+1)\,\frac{1}{2}(N+2) \overset{!}{=}$

$N' = N+1$: $S(N') = N' \cdot \frac{1}{2}(N'+1)$

$\Rightarrow$ IH gilt auch für $N+1$, und somit für alle $N \in \mathbb{N}$!

Beispiel 2: ⑤

Ausdruck: $\tilde{S}_k(x) = 1 + x + x^2 + \dots x^k = \sum_{n=0}^{k} x^n \quad , \ k \in \mathbb{N}_0$ (1)

IH: $\tilde{S}_k(x) = \dfrac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$ (2). Zeige, daß IH gilt!

I-Anfang: stimmt IH für $k=0$? $\tilde{S}_0(x) \overset{(1)}{=} 1$ ✓

$\tilde{S}_0(x) \overset{(2)}{=} \dfrac{1 - x^{0+1}}{1 - x} = \dfrac{1-x}{1-x} = 1$

I-Schritt: Nehme IH an für k, zeige, daß sie auch gilt für $k+1$;

m.a.W, zeige, daß $1 + \dots + x^{k+1} = \dfrac{1 - x^{(k+1)+1}}{1 - x}$?!?

$\tilde{S}_{k+1}(x) \overset{(1)}{=} \underbrace{1 + x + \dots x^k}_{\tilde{S}_k(x)} + x^{k+1}$

also gilt IH für $k+1$ ✓.

$\overset{(2)}{=} \dfrac{1 - x^{k+1}}{1 - x} + x^{k+1}$ massieren. $= \dfrac{1 - x^{k+1} + (1-x)x^{k+1}}{1 - x} = \dfrac{1 - x^{k+2}}{1 - x}$ □

1.2 Grundrechengesetze ⑤

- Kommutativgesetz der Addition: $a + b = b + a$ (1)
- Assoziativgesetz " " : $(a + b) + c = a + (b + c)$ (2)
- Kommutativgesetz der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$ (3)
- Assoziativgesetz " " : $(a \cdot b) c = a \cdot (b \cdot c)$ (4)
- Distributivgesetz $a(b+c) = ab + ac$ (5)

1.3 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Potenzieren: $x^n \equiv \overbrace{x\cdot x\cdot x \cdots x}^{n \text{ mal}}$ für $x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$ (1)

$\uparrow$ "ist definiert als" $\doteq$

Potenzgesetze: $x^n\cdot x^m = (x\cdot x\cdots x)^n(x\cdots x\cdot x)^m = x^{n+m}$ (2)

$$x^n\cdot y^n = (x\cdots x)^n(y\cdots y)^n \overset{(5.3)}{=} \overbrace{(xy)(xy)\cdots(xy)}^{n \text{ mal}} = (xy)^n \qquad (3)$$

$$(x^m)^n = \underbrace{(x\cdots x)^m(x\cdots x)^m\cdots(x\cdots x)^m}_{n \text{ mal}} = x^{m\cdot n} \qquad (4)$$

Mit Hilfe d. Potenzgesetze: $(x\in\mathbb{R},\ m,n\in\mathbb{N})$:

x^0: $(x\neq 0)$ $\quad x^0\cdot x^n \overset{(2)}{=} x^{0+n} \doteq x^n \Rightarrow x^0 = 1$ (5)

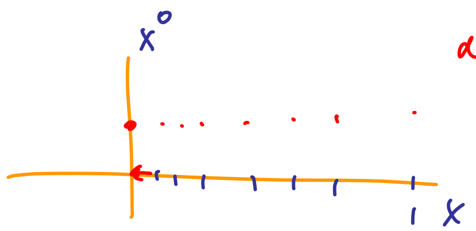
x^{-n}: $\quad x^{-n}\cdot x^n \overset{(2)}{=} x^{-n+n} = x^0 \overset{(5)}{=} 1 \Rightarrow x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ (6)

(6) $\cdot \frac{1}{x^n}$ $\quad x^{-n}\cdot \underbrace{x^n\frac{1}{x^n}}_{1} = 1\cdot\frac{1}{x^n} \Rightarrow x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Frage: was ist 0^0?

$0^0 \equiv 1$ als Grenzwert der Folge $\{x^0;\ x=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\}$

Physikerantwort:



Frage: was ist $\frac{1}{A}$

Per Def: $\frac{1}{A}$ ist die Zahl, für die gilt: $\frac{1}{A}\cdot A = 1$

und $A\cdot\frac{1}{A} = 1$.

$x^{\frac{1}{n}}$: $\quad \underbrace{(x^{1/n})}^{n} \overset{(7.4)}{=} x^{\frac{1}{n}\cdot n} = x^{1} = x$

$(x>0)$

$\Longrightarrow \quad x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ $\quad$ (denn, per Def: $(\sqrt[n]{x})^n = x$)

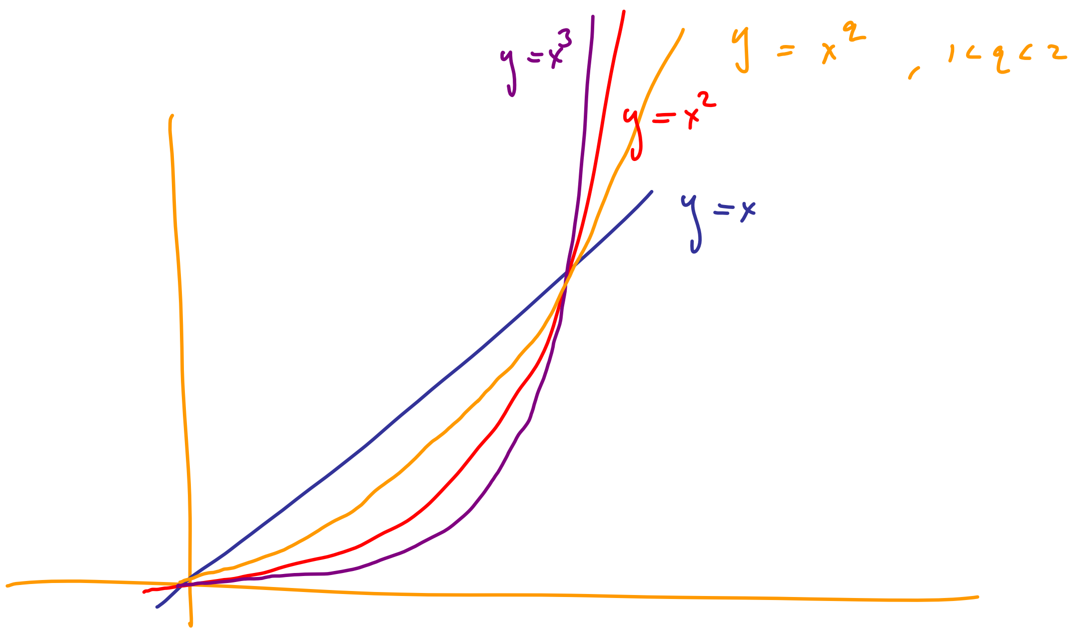
$x^{m/n}$: $\quad x^{m/n} = (x^{1/n})^m = (\sqrt[n]{x})^m$

$(x>0)$ $\quad = (x^m)^{1/n} = \sqrt[n]{x^m}$

x^y : $y \in \mathbb{R}$ (nicht unbedingt rational, aber approximierbar durch rationale Zahlen: $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$)

x^y auch approximierbar $x^{q_1}, x^{q_2}, x^{q_3}$

Graphisch:



Logarithmen (10)

$$y = x^{n}$$

$n \leftarrow$ gegeben

$\uparrow$ gegeben (x)

Umgekehrt: sei x, y bekannt, was ist n?

$$n = \log_x(y) \iff y = x^{n} \qquad (1)$$

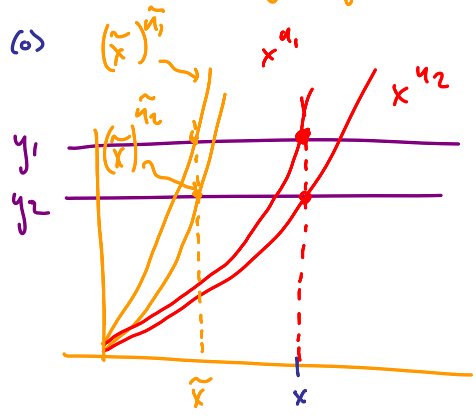
"n ist der Logarithmus von y zur Basis x" ("log holt die Potenz runter")

$\log_x(y)$ liefert Antwort auf die Frage: welche Potenz v. x liefert y? (zu welcher Potenz muss x genommen werden, um y zu bekommen).

Merkbeispiel: $10^3 = 1000 \iff 3 \ \log_{10}(1000)$

Rechengesetze (11)

z.B.: $y_1 > y_2 > 1$



1) $$\log_x(y_1 \cdot y_2) = \log_x(y_1) + \log_x(y_2) \qquad (0)$$

Denn: sei
$$y_1 = x^{n_1} \qquad (1)$$
$$y_2 = x^{n_2} \qquad (2)$$

$\overset{(10.1)}{\Rightarrow}$
$$n_1 = \log_x(y_1) \qquad (1')$$
$$n_2 = \log_x(y_2) \qquad (2')$$

$$y_1 \cdot y_2 \overset{(1,2)}{=} x^{n_1} \cdot x^{n_2} \overset{(7.2)}{=} x^{n_1 + n_2} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \log_x(y_1 \cdot y_2) \overset{(10.1)}{=} (n_1 + n_2) \overset{(1',2')}{=} \log_x(y_1) + \log_x(y_2) \qquad (4)$$

$\square$

(12)

(ii) $$\log_x(y_1/y_2) = \log_x(y_1) - \log_x(y_2) \qquad (1)$$

Denn:

$$\frac{y_1}{y_2} \overset{(11.1)(11.2)}{=} \frac{x^{n_1}}{x^{n_2}} \overset{(7.6)}{=} x^{n_1 - n_2} \qquad (2)$$

$$\log_x\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = n_1 - n_2 \overset{(11.1')(11.2')}{=} \log_x(y_1) - \log_x(y_2) \quad \square. \qquad (3)$$

iii) $$\log_x(y^n) = n \log_x(y) \qquad (4)$$

Denn:

$$y = x^m \overset{(10.1)}{\Longleftrightarrow} m = \log_x(y) \qquad (5)$$

$$y^n = (x^m)^n \overset{(7.4)}{=} x^{m \cdot n} \qquad (6)$$

$$\log_x(y^n) = m \cdot n = n \cdot \log_x(y) \qquad (7)$$

(13)

$$\log_x(y^{-n}) = -n \log_x(y)$$

$$\log_x(y^{1/n}) = \frac{1}{n} \log_x(y)$$

Besondere Logarithmen: $a = 10$: $\log_{10}(x) = \lg(x)$

$a = 2$: $\log_2(x) = \mathrm{ld}(x)$

$a = e = 2.71\ldots$ $\log_e(x) = \ln(x)$

$$\left[f(x) = e^x \quad , \quad f'(x) = e^x \right]$$

iv) was ist $\log_b(x)$, ausgedrückt durch $\log_a(x)$

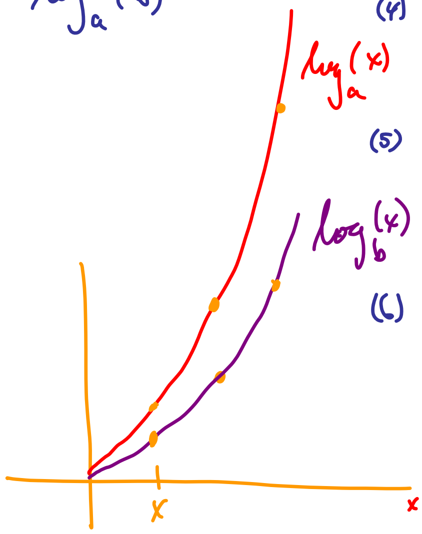
Sei: $y = \log_b(x)$ (1) $\overset{(10.1)}{\Longrightarrow}$ $x = b^y$ (2)

Sei: $b = a^m$ (3) $\overset{(10.1)}{\Longrightarrow}$ $m = \log_a(b)$ (4)

(2): $x = b^y \overset{(3)}{=} (a^m)^y \overset{(7.4)}{=} a^{m\cdot y}$ (5)

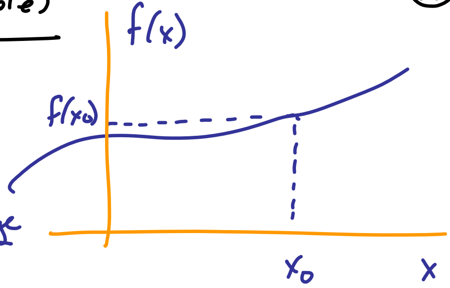
(10.1), (5): $\log_a(x) = m\cdot y \overset{(4)}{=} y \log_a(b)$ (6)

$$\log_b(x) = y = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$



1.4 Funktionen einer Veränderlichen (= Variable)

Eine Funktion f ist eine Abbildung, die jedem Element x aus der Definitionsmenge (D_f), genau ein Element f(x) aus einer Zielmenge zuordnet.



Notation: f : Definitionsmenge $\longrightarrow$ Zielmenge

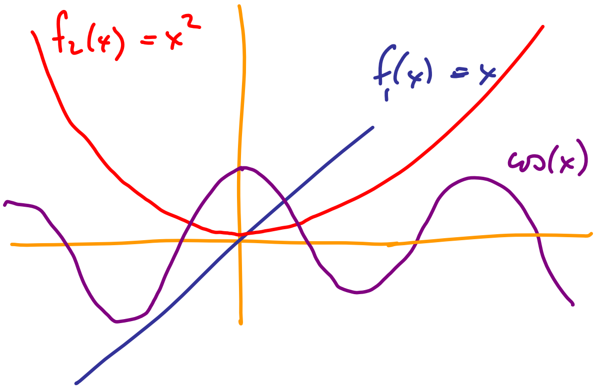
$x \longmapsto f(x)$

Argument | Abbildungsvorschrift | Zielelement / Bildelement

Heute: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^2$

(16)



$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R} = B_{f_1}$

$x \mapsto f_1(x) = x$

$f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = \{y \in \mathbb{R},\ y \geq 0\}$, $\quad \mathbb{R}^+ = B_{f_2} \subset \mathbb{R}$

$x \mapsto f_2(x) = x^2$

Zielmenge

$f_3: \mathbb{R} \to [-1, 1] = B_{f_3} \subset \mathbb{R}$

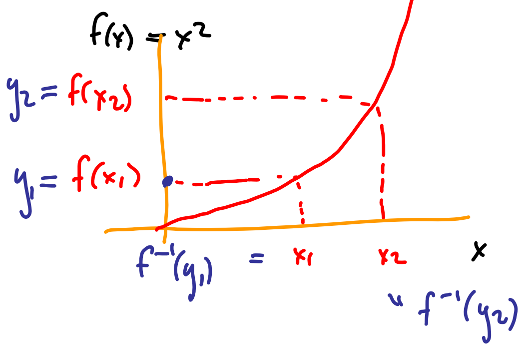
$x \mapsto f_3(x) = \cos(x)$

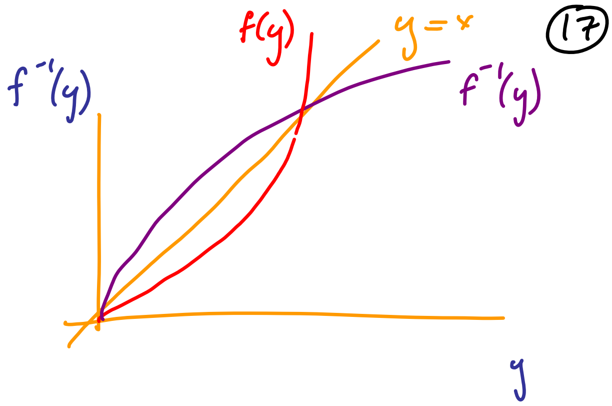
Alle Elemente der Zielmenge, die beim Einsetzen der D_f tatsächlich erreicht werden, bilden die Bildmenge (= Wertemenge) (das Bild) B_f von f.

$$B_f = \{ f(x);\ x \in D_f \}$$

Umkehrfunktion:

(17)



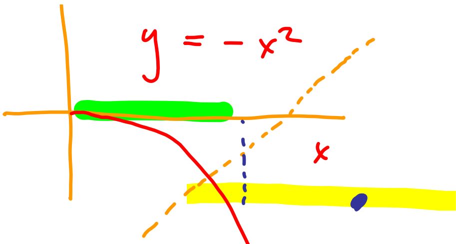


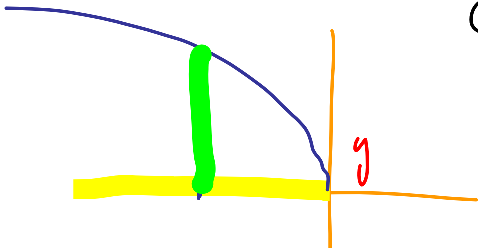
Def: Falls es zu jedem $y \in B_f$ genau ein $x \in D_f$ gibt (1-1-Zuordnung), mit $y = f(x)$, so definiert dies auch wieder eine Funktion, „f^{-1}", die "Umkehrfunktion":

$f: D_f \to B_f$ $\qquad$ $f^{-1}: B_f \to D_f$ $\qquad$ $D_{f^{-1}} = B_f$

$x \mapsto f(x) = y$ $\qquad$ $y \mapsto x = f^{-1}(y)$ $\qquad$ $B_{f^{-1}} = D_f$

Beispiel:





$f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^-$ ------ (1).

$x \longmapsto y = f(x) = -x^2$

$y = -x^2$

$x^2 = -y$

$x = \sqrt{-y}$

$y \overset{f^{-1}}{\longmapsto} \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ \quad x = f^{-1}(y) = \sqrt{-y}$ (2)

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = f^{-1}(-x^2) = \sqrt{-(-x^2)} = \sqrt{x^2} = x$ ✓

$f(f^{-1}(y)) = f(\sqrt{-y}) = -(\sqrt{-y})^2 = -(-y) = y$ ✓