5. Vektoren

7.10.2013

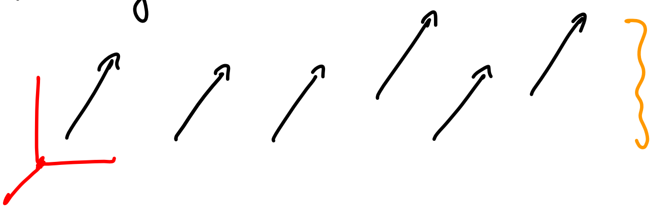
Skalare Größe: ist durch Maßzahl (und Maßeinheit) charakterisiert

z.B. Temperatur, Masse, Zeit, Energie, elektrische Ladung, Druck, ...

Vektorielle Größe: ist durch Maßzahl (Maßeinheit) und eine Richtung charakterisiert

z.B. Geschwindigkeit, Kraft, Impuls, Beschleunigung, Drehmoment, Ort ...

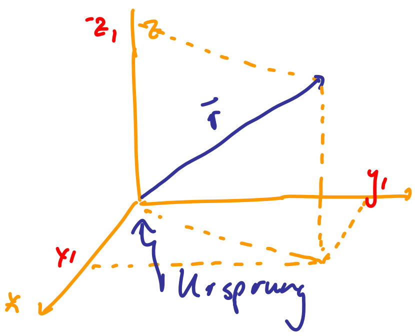
Geometrische Def.: Ein Vektor ist die Menge aller gleichgerichteter, gleich langer Pfeile:



alle diese Pfeile stellen denselben Vektor dar.

Oft wählt man aus dieser Menge einen charakteristischen Repräsentanten: den Pfeil, der bei einem ausgewählten Punkt (i.d. Regel der Nullpunkt = "Ursprung") startet. ②

Beispiel: Ortsvektor:

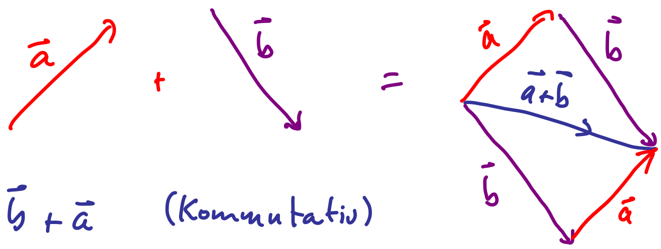


$\vec{r} = (x_1, y_1, z_1)$

$\mathbf{r}, \vec{r}, \vec{r}, \bar{r}, \underline{r}$

Addition von Vektoren:

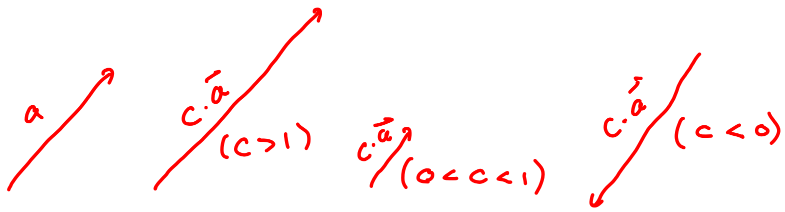
(geometrische Def.)



Beobachtung: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativ)

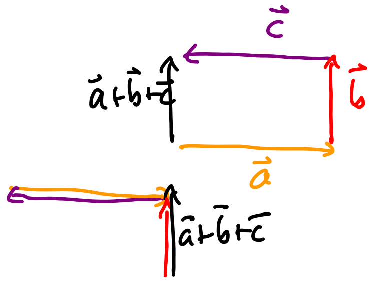
Multiplikation mit Skalar: (Streckung $c>1$, Stauchung $0<c<1$, Richtungsumkehr $c<0$)

③



Vektoraddition ist assoziativ:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$



Formale Definition:

④

Ein Vektorraum ist eine Menge V mit zwei Verknüpfungsregeln:

"+": Vektoraddition: $+ : (V, V) \longrightarrow V$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \overrightarrow{(x+y)} = \vec{x}+\vec{y}$$

"•": Skalarmultiplikation:

$$\bullet : (\mathbb{R}, V) \longrightarrow V$$

$$(a, \vec{x}) \longmapsto a\cdot\vec{x} \equiv a\vec{x}$$

mit folgenden Eigenschaften (Vektorraum-Axiome)

(1) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V \quad \forall\, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$

(2) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \quad \forall\, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$

(3) $\vec{v}_1 + (\vec{v}_2+\vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 \quad \forall\, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$

(4) Es gibt ein "neutrales Element" $\vec{0}$, mit $\vec{0}+\vec{v}=\vec{v} \quad \forall \vec{v}\in V$

(5) $\forall \vec{v} \in V$ existiert ein "Inverses", "$-\vec{v}$", so daß $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$

5

Anmerkung: Mit den Eigenschaften (1), (3), (4), (5) heißt V eine "Gruppe" bezüglich Addition.

Mit zusätzlich Eigenschaft (2), heißt V eine "kommutative Gruppe" (Abelsche Gruppe).

Weiterhin:

(6) $\alpha\cdot\vec{v} \in V \qquad \forall \vec{v}\in V,\ \alpha\in\mathbb{R}$

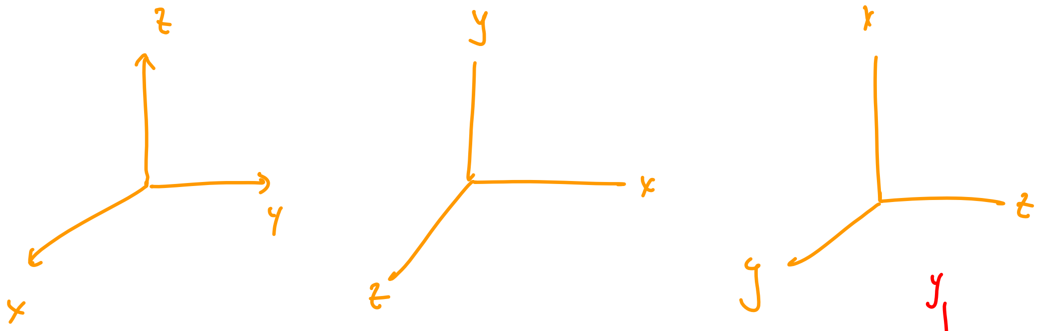
(7) $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{v}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{v} \qquad \forall \vec{v}\in V,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

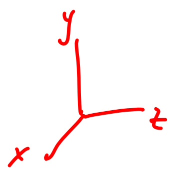
(8) $(\alpha+\beta)\cdot\vec{v} = \alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_1, \quad \forall \vec{v}\in V,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

(9) $\alpha\cdot(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = \alpha\vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2, \quad \forall \vec{v}_1,\vec{v}_2\in V,\ \alpha\in\mathbb{R}$ 6

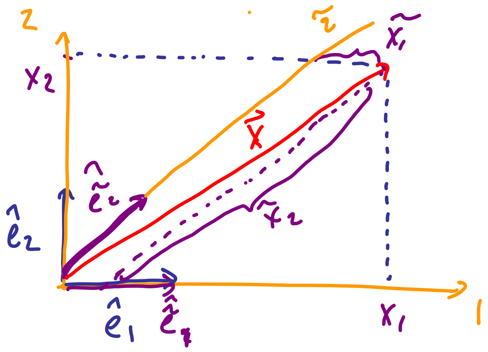
(10) $1\cdot\vec{v} = \vec{v} \qquad \forall \vec{v}\in V.$

Koordinaten: zur Beschreibung v. Vektoren wählt man in d. Regel ein "Koordinaten-System" aus rechtwinklig zueinander stehenden Koordinatenachsen, die ein "Rechtssystem" bilden:



[Linkssystem: ]

7

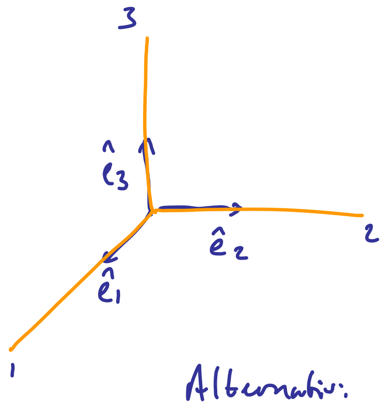


$$= \tilde{x}_1 \hat{\tilde{e}}_1 + \tilde{x}_2 \hat{\tilde{e}}_2$$

$$\vec{x} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_1 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spaltenvektor



Koordinaten/Komponenten

$$\vec{x} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Kurznotation: $\vec{x}$ "=" $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Alternativ: $\hat{e}_1 \longmapsto (1,0)$, $\hat{e}_2 \longmapsto (0,1)$, $\vec{x} \to (x_1, x_2, x_3)$

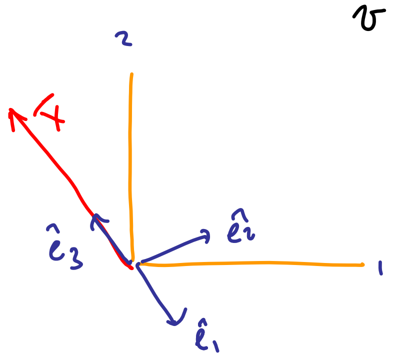
"Reihenvektor"

8

$\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ bildet eine "Basis" für den (2-dim) Vektorraum:

jede $\vec{v} \in V$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$\vec{v} = \underbrace{v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2}_{\text{"Linearkombination"}}$$

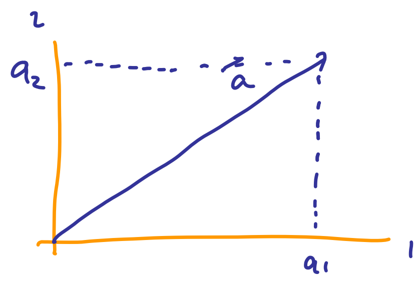


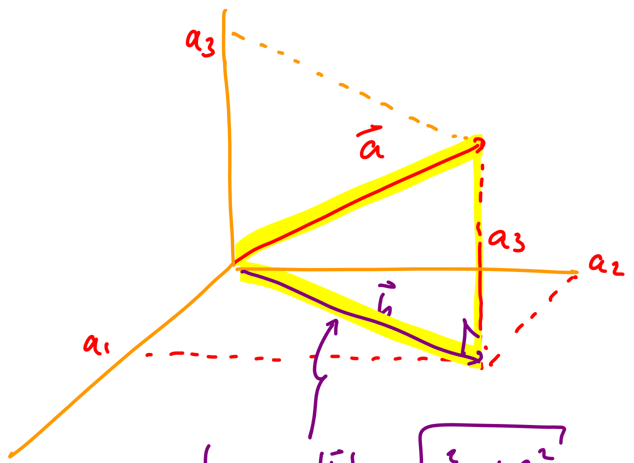
$$\vec{v} = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3$$

dann sind v_1, v_2, v_3 nicht eindeutig.

"Betrag" (die Länge) eines Vektors ergibt sich laut Pythagoras aus:

2D: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, 3D: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$





$b = |\vec{b}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$|\vec{a}| = \sqrt{b^2 + a_3^2}$

$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

__Skalarprodukt:__ $(V, V) \longrightarrow \mathbb{R}$

z.B. in 2D: $V = \mathbb{R}^2$

Definition: $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 \equiv 1$ (1)

$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 \equiv 1$ (2)

$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 \equiv \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \equiv 0$ (3)

Das definiert eine Abbildung:

$$\bullet \; (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 b_1 + a_2 b_2)$$

__denn:__

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2) \cdot (b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1}_{=1} + a_1 b_2 \underbrace{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2}_{=0} + a_2 b_1 \underbrace{\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1}_{=0}$$

(9.1) $\leftarrow$ (9.3) $\rightarrow$

$$+ a_2 b_2 \underbrace{\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2}_{=1}$$

(9.2)

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + b_1 b_1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Rechenregeln für Komponenten: (11)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2) + (b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2)$$

$$= (a_1 + b_1)\hat{e}_1 + (a_2 + b_2)\hat{e}_2$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Analog: $c\vec{a} = c(a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2) = c a_1 \hat{e}_1 + c a_2 \hat{e}_2$

$$c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c a_1 \\ c a_2 \end{pmatrix}$$

Verallgemeinerung: "Inneres Produkt" auf einem Vektorraum V (12)

ist eine positiv definite Bilinearform $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$$(v, v) \rightarrow \mathbb{R}$$

z.B. für $\mathbb{R}^2$: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

mit folgenden Verknüpfungsregeln:

1. Bilinearität: $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$

2. $\langle \vec{x}, \lambda \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

3. Symmetrie. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$

4. Positiv definit: $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$, $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Beispiel: $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = (a_1 + b_1) \cdot c_1 + (a_2 + b_2) \cdot c_2$ (13)

$$= (a_1 c_1 + a_2 c_2) + (b_1 c_1 + b_2 c_2)$$

$$= \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \quad \Longrightarrow \text{ Bilinearität (1) } \checkmark$$

Analog: $\langle \vec{a}, \lambda \vec{c} \rangle = a_1 \cdot (\lambda c_1) + a_2 \cdot (\lambda c_2)$

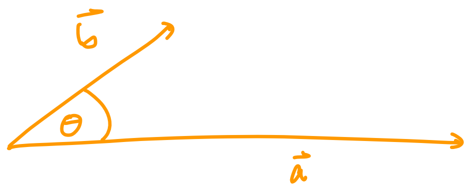
$$= \lambda \left[a_1 c_1 + a_2 c_2 \right] = \lambda \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

$$\Longrightarrow \text{ Bilinearität (2) } \checkmark.$$

Geometrische Anschauung: $\vec{a} \neq \vec{b}$: (14)

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\theta = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$



$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Longrightarrow \cos \theta = 0 \Longrightarrow \theta = \pi/2$$

$$= 90^\circ$$

Speziell in 3 Dimensionen: Vektorprodukt:

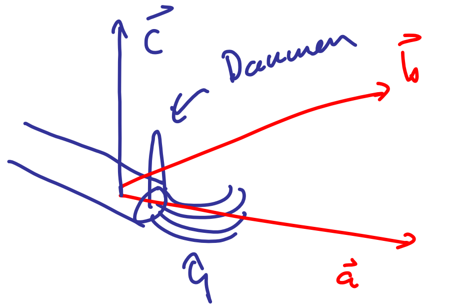
$$\text{"}\times\text{"} : (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\vec a, \vec b) \longmapsto \vec a \times \vec b = \vec c$$

mit den Eigenschaften:

Betrag: $|\vec c| \equiv |\vec a| \cdot |\vec b| \cdot \sin\left(\theta(\vec a, \vec b)\right)$

Richtung: $\vec a \times \vec b$ ist $\perp \vec a$ und $\perp \vec b$



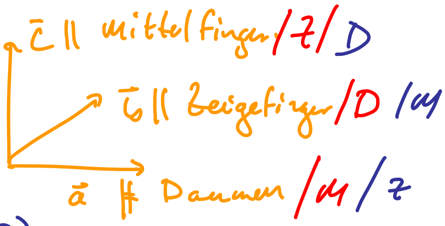
andere Finger greifen von $\vec a$ nach $\vec b$

Orientierung:

rechte-Hand-Regeln:

(D, Z, M)

(M, D, Z), (Z, M, D)



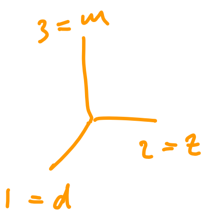
Vektorprodukt in Komponenten ausgedrückt?

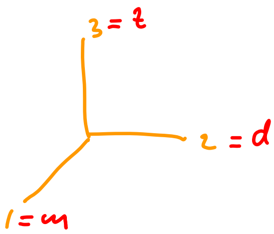
$$\hat e_i \times \hat e_j = \; ? \quad , \quad i,j = 1,2,3$$

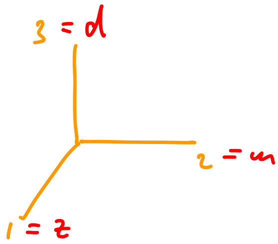
Es gilt immer: $\vec a \times \vec a = \vec 0$, denn $\sin\phi(\vec a, \vec a) = \sin 0 = 0$

$\hat e_1 \times \hat e_1 = \vec 0$ (1) $\quad \hat e_2 \times \hat e_2 = \vec 0$ (2) $\quad \hat e_3 \times \hat e_3 = \vec 0$ (3)

$\hat e_1 \times \hat e_2 = \hat e_3$ (4) $\quad \hat e_2 \times \hat e_3 = \hat e_1$ (5) $\quad \hat e_3 \times \hat e_1 = \hat e_2$ (6)







Es gilt immer: $\vec a \times \vec b = - \vec b \times \vec a$ (7)

$\hat e_2 \times \hat e_1 \overset{(4),(7)}{=} - \hat e_3$ (8) $\quad \hat e_3 \times \hat e_2 = - \hat e_1$ (9) $\quad \hat e_1 \times \hat e_3 = - \hat e_2$ (10)

$$\vec a \times \vec b = (\overset{a}{a_1 \hat e_1} + \overset{b}{a_2 \hat e_2} + \overset{c}{a_3 \hat e_3}) \times (\overset{d}{b_1 \hat e_1} + \overset{e}{b_2 \hat e_2} + \overset{f}{b_3 \hat e_3})$$

$$= \hat e_1 (\overset{b.f}{a_2 b_3} \overset{+}{-} \overset{c\,e}{a_3 b_2})$$

$$+ \hat e_2 (\overset{c.d}{a_3 b_1} \overset{+}{-} \overset{a f}{a_1 b_3}) \qquad = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$+ \hat e_3 (\overset{a.e}{a_1 b_2} - \overset{b.d}{a_2 b_1})$$

Merkregel:

$$\begin{vmatrix} \hat e_1 & \hat e_2 & \hat e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat e_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \hat e_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat e_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat e_1 (a_2 b_3 - b_2 a_3) - \hat e_2 (a_1 b_3 - b_1 a_3) + \hat e_3 (a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

Alternativ:

$$\vec a \times \vec b = \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$\square$.