

Blatt 00: Integration und Ableitung

Lösung Beispielaufgabe 1: Partielle Integration (*)

$$(a) \int dx \, x \ln x = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int dx \, \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int dx \, x = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$$

$$(b) \quad \int dx \, \sin x \cos x = \sin^2 x - \left(\int dx \, \cos x \sin x \right) + c \quad \left| + \int dx \, \cos x \sin x \right.$$

$$\Rightarrow \int dx \, \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$$

Lösung Beispielaufgabe 2: Partialbruchzerlegung (*)

(a)

$$\int dx \, \frac{3x+3}{(x+1)^2(x-2)} = \int dx \, \frac{3}{(x+1)(x-2)}$$

$$\stackrel{(1) \text{ und } (2)}{=} \int dx \, \frac{-1}{x+1} + \int dx \, \frac{1}{x-2}$$

$$= -\ln(x+1) + \ln(x-2) + \text{const} = \ln \left(\frac{x-2}{x+1} \right) + \text{const}$$

nur Polstellen 1. Ordnung, denn der Nenner hat Zerlegung $(x+1)(x-2)$

Ansatz: $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A + B}{(x+1)(x-2)}$

$$(1) \, A+B=0 \quad \rightarrow \quad A=-B$$

$$(2) \, -2A+B=3 \quad \rightarrow \quad \text{mit (1)} \quad -3A=3 \quad \rightarrow \quad A=-1 \text{ und } B=1$$

(b)

$$\int dx \, \frac{3x}{(x+1)^2(x-2)}$$

$$\stackrel{(1),(2) \text{ und } (3)}{=} \int dx \, \frac{-\frac{2}{3}}{x+1} + \int dx \, \frac{1}{(x+1)^2} + \int dx \, \frac{\frac{2}{3}}{x-2}$$

$$= -\frac{2}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{3} \ln(x-2) + \text{const} = \frac{2}{3} \ln \left(\frac{x-2}{x+1} \right) - \frac{1}{x+1} + \text{const}$$

Polstellen 1. und 2. Ordnung, denn der Nenner hat Zerlegung $(x+1)(x+1)(x-2)$

$$\begin{aligned}\text{Ansatz: } & \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} \\ &= \frac{A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)} \\ &= \frac{A(x^2 - x - 2) + Bx - 2B + C(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2(x-2)} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (-A+B+2C)x - 2A - 2B + C}{(x+1)^2(x-2)}\end{aligned}$$

$$(1) \quad A + C = 0 \quad \rightarrow \quad A = -C$$

$$(2) \quad -A + B + 2C = 3 \quad \rightarrow \quad \text{mit (1)} \quad B + 3C = 3 \quad \rightarrow \quad B = 3 - 3C$$

$$(3) \quad -2A - 2B + C = 0 \quad \rightarrow \quad \text{mit (1)} \quad 3C - 2B = 0$$

$$\text{und mit (2)} \quad 3C - 2(3 - 3C) = 9C - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad C = \frac{2}{3}, \quad B = 1, \quad A = -\frac{2}{3}$$

Lösung Beispielaufgabe 3: Substitutionsmethode (*)

$$(a) \quad \int dx \frac{1}{\sqrt{7-3x}} \quad \begin{matrix} y=7-3x \\ dy=-3dx \end{matrix} \quad -\frac{1}{3} \int dy \frac{1}{\sqrt{y}} dy = -\frac{2}{3} [\sqrt{y}] = -\frac{2}{3} \sqrt{7-3x}$$

$$(b) \quad \int_0^2 dx \frac{2x+3}{x^2+3x+5} \quad \begin{matrix} y=x^2+3x+5 \\ dy=(2x+3)dx \end{matrix} \quad \int_5^{15} dy \frac{1}{y} = [\ln y]_5^{15} = \ln 15 - \ln 5 = \ln \left(\frac{15}{5}\right) = \ln 3$$