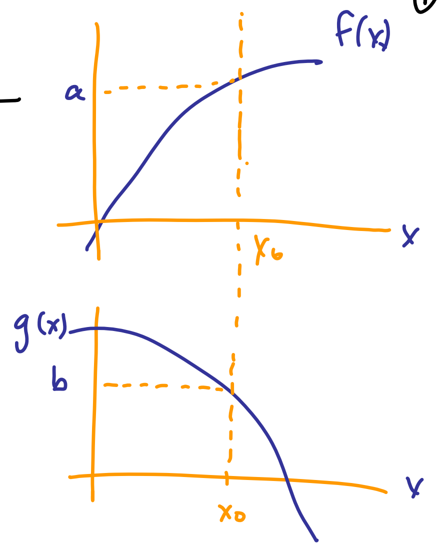
Vorlesung III

2.10.13

1

2.2 Praktische Anwendungen v. Grenzwerten



Sätze über Grenzwerte

Für Grenzwerte (auch ∞, rechtsseitig, oder linksseitig) von Funktion gilt:

Aus $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, folgt

i) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(c\, f(x) + d\, g(x) \right) = c \cdot a + d \cdot b$

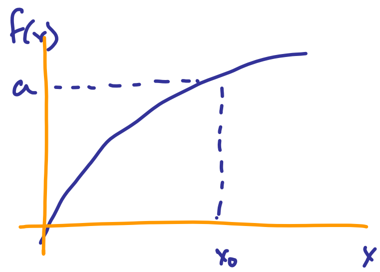
ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = a \cdot b$, (iii) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$

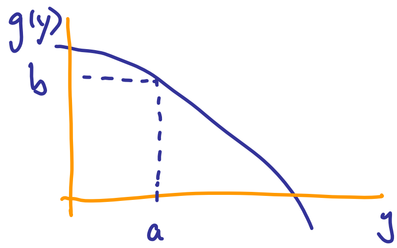
2

Bsp: $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\frac{a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \right] = \lim\limits_{x \to \infty} \left[\frac{a_2 + a_1/x + a_0/x^2}{b_2 + b_1/x + b_0/x^2} \right] = \frac{a_2}{b_2}$

iv) Sei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{y \to a} g(y) = b$

$\lim\limits_{x \to x_0} g(\underbrace{f(x)}_{a}) = b$

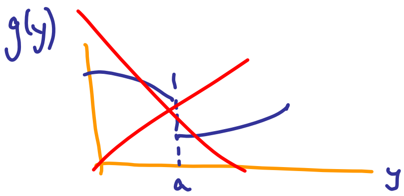




FALLS g, f 'hinreichend gutartig'!

sind (keine Sprünge, usw.,

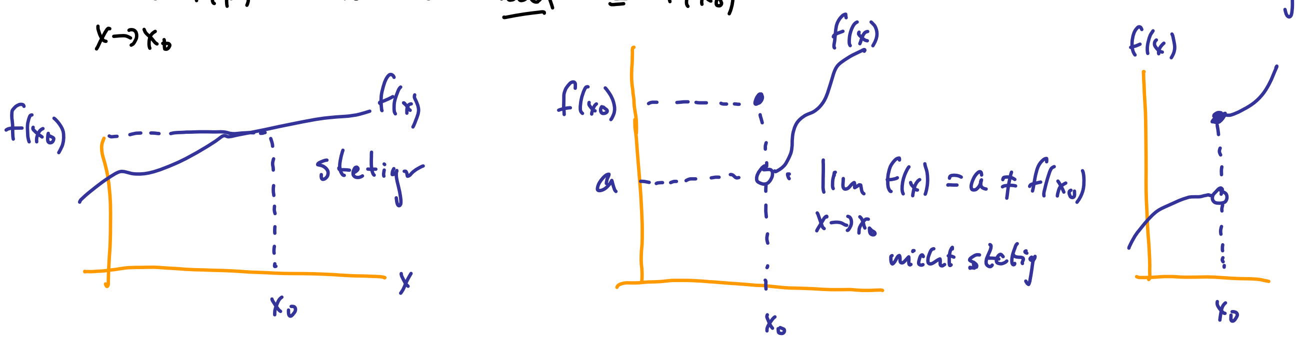
sonst existieren Limites nicht).



2.3 Stetigen Funktion

Def.: $f(x)$ ist bei $x_0 \in D_f$ <u>stetig</u>, falls

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert <u>und</u> $= f(x_0)$

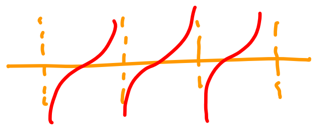


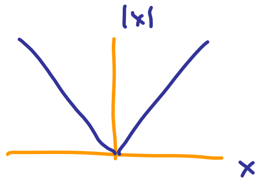
Falls $f(x)$ bei jedem $x_0 \in D_f$ stetig ist, heißt <u>Funktion</u> "stetig"

Beispiele v. stetigen Funktion:

- Polynome
- sin, cos, tan, $\log_a(x)$, a^x, $|x|$

für jeden Ast getrennt

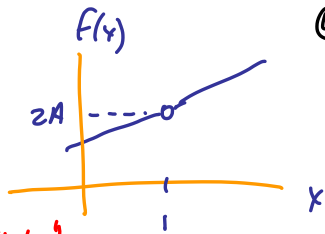




z.B.: $f(x) = A\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right) = \dfrac{A(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

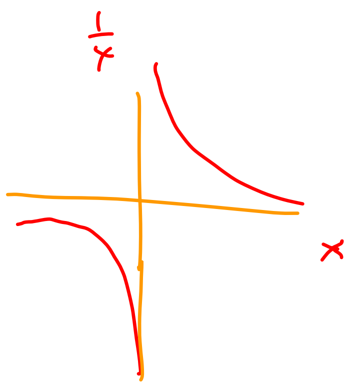
$\forall x \neq 1: \quad f(x) = A(x+1)$

"Definitionslücke"



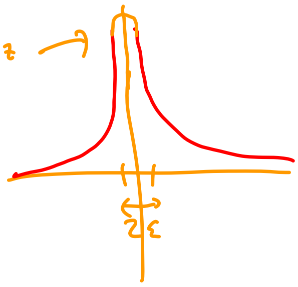
Definieren: $f(x=1) = 2A$ "Fortsetzung"

Was wäre für $f(x) = \dfrac{1}{x}$ bei $x = 0$



Divergenz

$g(x) = \dfrac{1}{|x|}$



$\hat{g}(x) = \dfrac{1}{|x|+\varepsilon}$,

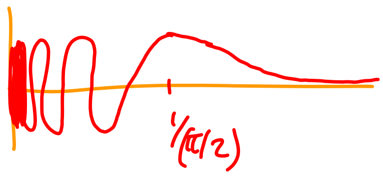
2.3.2 Unstetigkeitsstellen : dort, wo $f(x)$ nicht stetig ist

"$\forall$" = "für alle"

Bsp:

$$f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow [-1,1]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \forall x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



2.3.3 Hebbare Definitionslücken

Sei $f(x)$ bei x_0 nicht definiert, aber $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ existiere,

"x_0 ist eine hebbare Definitions=lücke"

dann läßt sich f zu $\tilde{f}$ "fortsetzen" durch

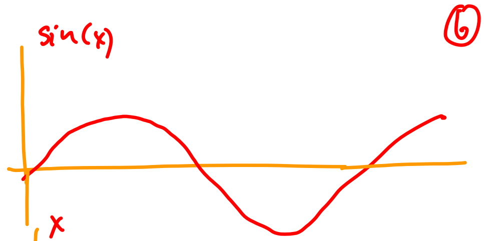
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \forall\ x \in D_f \\ a & \forall\ x = x_0 \end{cases}$$

"stetige Fortsetzung von f"

Bsp: siehe Seite 4.

Weniger triviales Beispiel:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \forall\ x \neq 0$$



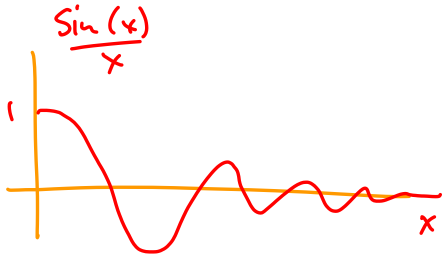
$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0} (x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0}{0} = ?$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin'(x)}{x'} = \frac{\cos x}{1}\Big|_{x=0} = 1$$

(l'Hopital)

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \forall\ x \neq 0 \\ 1 & \forall\ x = 0 \end{cases}$$



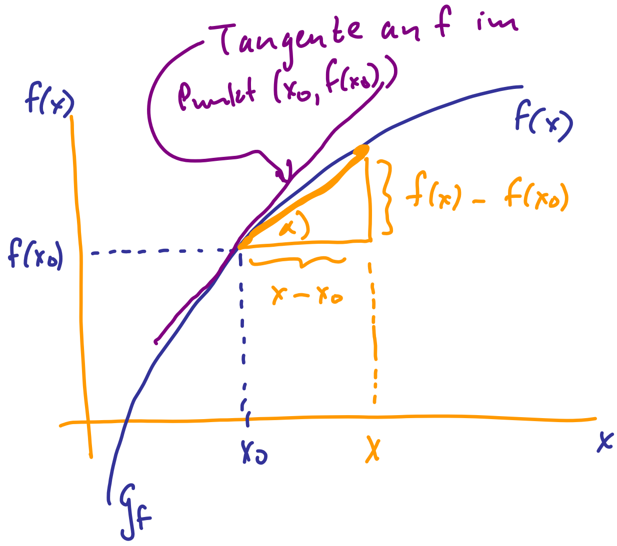
3. Differentialrechnung

3.1 Differentialquotient

$f(x)$ sei stetige Funktion:

Steigung von 

$$= \tan\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



$$\text{Steigung von } f \text{ bei } x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

"Differentialquotient" von f bei x_0: $\quad x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in D_f \setminus \{x_0\}$

3.2 Ableitung

$f(x)$ ist bei x_0 "differenzierbar" falls $\underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\equiv \text{ "Ableitung v. f. bei } x_0\text{"}}$ existiert.

Notationen:

$$f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x = x_0} \equiv \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d_x f(x)\Big|_{x_0}$$

"f-Strich" — "df nach dx" bei x_0 — "d nach dx von f(x)" bei x_0 — "d-x von f"

$f'(x_0)$ gibt Steigung an von der Tangente an den Graph G_f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Satz: Jede differenzierbare Fkt. ist stetig.

3.3 Ableitungsfunktion

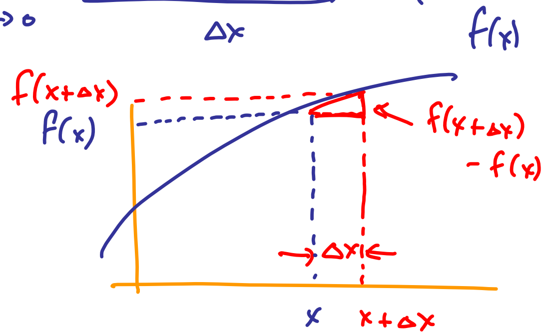
$$f: D_f \subset \mathbb{R} \to W_f \subset \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

heißt "differenzierbar", wenn sie an jeder Stelle $x \in D_f$ differenzierbar ist (im Sinne von 3.2)

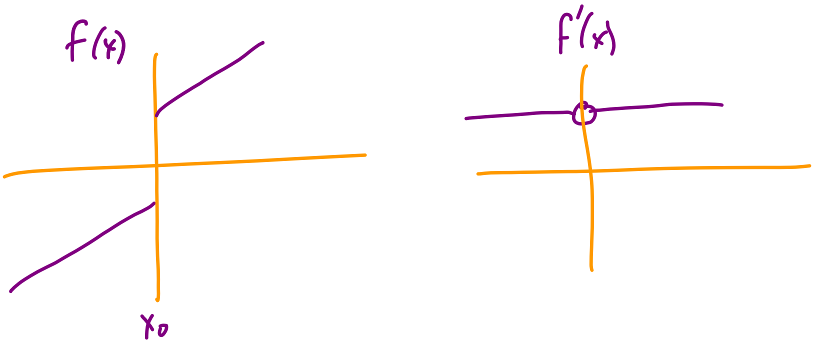
"Ableitungsfunktion" = "Ableitung v. f":

$$f': D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

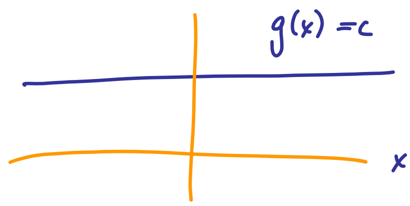
$$x \mapsto f'(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$



"f differenzierbar" $\Longleftrightarrow$ "f' stetig ist"



Ableitungsregeln



1) Ableitung einer Konstanten:

$$g(x) = c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 0$$

denn $g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x}$

$= 0$

2) Linearkombination von zwei (diff.) Funktionen, u, v: ⑪

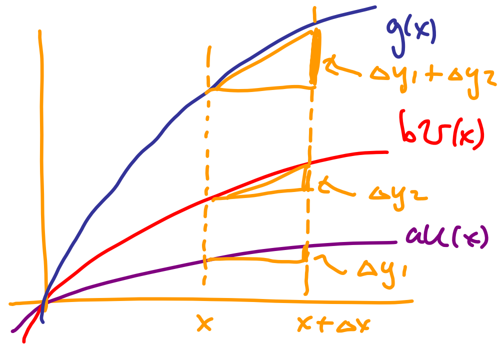
$$g(x) = a\,u(x) + b\,v(x), \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

"g ist linear in u und v" $\Longleftrightarrow$ u, v kommen nur zur ersten Potenz vor.

"g ist nicht-linear in u oder v" $\Longleftrightarrow$ z.B. $g(x) = u^2(x)$

$g(x) = \sin(u(x))$

$$g'(x) = a\,u'(x) + b\,v'(x)$$



---

⑫

Beweisidee:

$$g'(x) \overset{(9.1)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[a\,u(x+\Delta x) + b\,v(x+\Delta x)] - [a\,u(x) + b\,v(x)]}{\Delta x}$$

$$= a \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\right] + b \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right]$$

$$\overset{(9.1)}{=} a\,u'(x) + b\,v'(x)$$

3. Produktregel (PR)

$$g(x) = u(x)\, v(x) \qquad (1)$$

13

$$g'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$$

Beweisidee:

$$g'(x) \overset{(9.1)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{①}{u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x)} \overbrace{\overset{②}{- u(x)\, v(x+\Delta x)} + \overset{③}{u(x)\, v(x+\Delta x)}}^{=0} \overset{④}{- u(x)\, v(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\left(\overset{①}{u(x+\Delta x)} - \overset{②}{u(x)}\right) v(x+\Delta x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[u(x) \frac{\left(\overset{③}{v(x+\Delta x)} - \overset{④}{v(x)}\right)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right] \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) + \left[\lim_{\Delta x \to 0} u(x) \right] \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x) \implies (1)$$

14

Frage:

$$h(x) = u(x)\, v(x)\, w(x)$$

$$h'(x) = [u\, v] \cdot w$$

$$= [u\, v]' \cdot w + [u\, v] \cdot w'$$

$$= [u'\, v + u\, v']\, w + u\, v\, w'$$

$$= u' v w + u v' w + u v w'$$

4) Kettenregel:

$$g(x) = u(v(x))$$

$$g'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

↑ "nachdifferenzieren"

15

Bsp 1: $u(x) = 2x^2$ $\qquad v(x) = 3(x+1)$ $\qquad g(x) = 2(3(x+1))^2$

$u'(x) = 2 \cdot 2x = 4x$ $\qquad v'(x) = 3$ $\qquad g'(x) = 2 \cdot 2(3(x+1)) \cdot 3 = 36(x+1)$

Bsp 2: $f(x) = \left(\tfrac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 10\right)^5$ $\qquad \dfrac{d\,y^\alpha}{dy} = \alpha\, y^{\alpha-1}$

$$f'(x) = 5\left(\tfrac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 10\right)^4 \cdot \left[\tfrac{1}{5} \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 0\right]$$

16

Beweisidee:

$$g'(x) \overset{(9.1)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

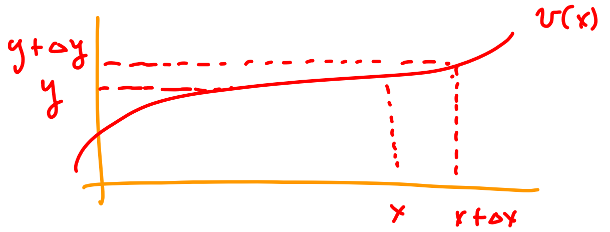
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\left(\frac{u(v(x+\Delta x)) - u(v(x))}{v(x+\Delta x) - v(x)} \right) \cdot \frac{(v(x+\Delta x) - v(x))}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta \cancel{x} y \to 0} \left[\frac{u(y+\Delta y) - u(y)}{(\cancel{y} + \Delta y) - \cancel{y}} \right] \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= u'(y) \cdot v'(x) = u'(v(x))\, v'(x)$$

$y = v(x)$

$y + \Delta y = v(x + \Delta x)$



5. Quotientenregel $\quad g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

N = Nenner = v
Z = Zähler = u
A = Ableitung

$$g'(x) = \frac{v(x)\,u'(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2} = \frac{NAZ - ZAN}{v^2}$$

Beweisidee: (Anwendung v. Kettenregel / Produktregel)

$$g(x) = u(x)\,v^{-1}(x)$$

Produktr.

$$g'(x) = u'(x)\,v^{-1}(x) + u(x)\,\underbrace{(v^{-1})'(x)}_{-\frac{1}{v^2(x)}\cdot v'(x)} = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}$$

Kettenregel: $g(x) = s(t(x))$ $\qquad s(y) = \frac{1}{y}$, $\quad t(x) = v(x)$

$$g'(x) = s'(t(x))\,t'(x) \qquad s'(y) = -\frac{1}{y^2}$$

$$= -\frac{1}{y^2}\cdot t'(x) = -\frac{1}{s(y)^2}\cdot t'(x)$$

Ableitungen v. speziellen Funktion:

·) Potenz: $\quad f_n(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$; $\quad f'(x) = n\,x^{n-1}$

Beweisidee: Induktion!

IH: $f_n'(x) = n\,x^{n-1}$

I-Anfang: $n = 1$, $\quad f_1(x) = x$, $\quad f_1'(x) = 1 \overset{?}{=} 1\cdot x^{1-1} = 1$

I-Schritt: Für gegebenes n gelte: $f_n(x) = x^n \Rightarrow f_n'(x) = n\,x^{n-1}$

Betrachte nun: $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n\cdot x = f_n(x)\cdot x$

Berechne Ableitung: $f_{n+1}'(x) \overset{PR}{=} (x^n)'\cdot x + x^n\cdot(x)'$

$$\overset{IH}{=} (n\,x^{n-1})\cdot x + x^n\cdot 1$$

$$= x^n(n+1) = (n+1)\,x^{(n+1)-1} \Longrightarrow$$

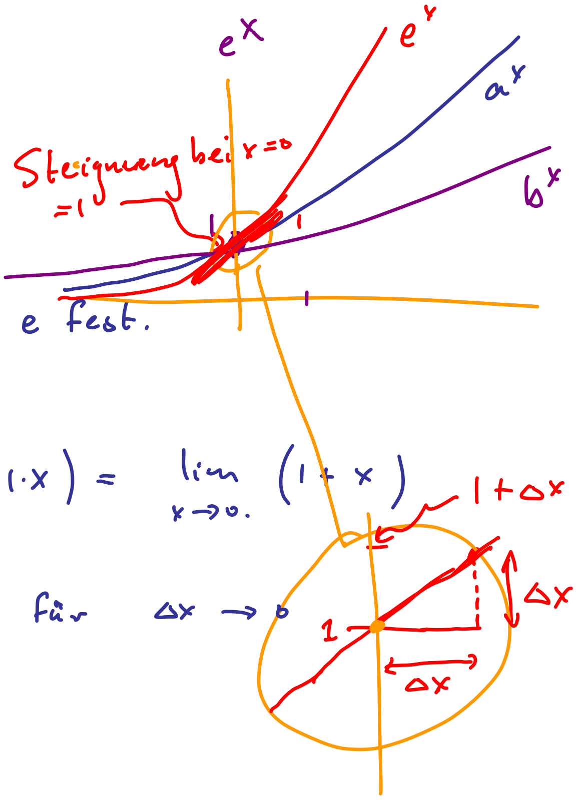
IH gilt auch für $n' = n+1$ $\square$.

Analog: $g(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \alpha\, x^{\alpha - 1}$ (19)

Exponentialfunktion:

$$h(x) = e^{x},$$

mit e so gewählt, dass $h'(0) = 1$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ legt e fest.



dann gilt: $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x}) = \lim\limits_{x\to 0}(1 + 1\cdot x) = \lim\limits_{x\to 0.}(1 + x)$

oder $\quad e^{\Delta x} \simeq 1 + \Delta x \quad$ für $\Delta x \to 0$

$$e^{\Delta x} - 1 \simeq \Delta x$$

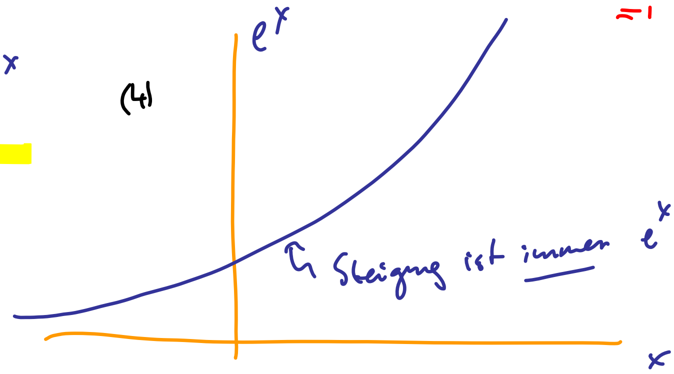
Berechne nun Ableitung von e^{x}:

(20)

$$h'(x) = (e^{x})' = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{e^{x+\Delta x} - e^{x}}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{x}\cdot e^{\Delta x} - e^{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{x}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{x} \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)}_{=1}$$

$$\Longrightarrow \quad (e^{x})' = \frac{de^{x}}{dx} = e^{x} \quad (4)$$



Was ist $\frac{d}{dx} a^{x} = ?$

Kommt gleich!

Logarithmus: $f(x) = \ln(x) = \log_e(x)$ (1)

per Def.

Beweisidee: Ausgangspunkt: $\ln(e^x) = \log_e(e^x) = x$ (2)

$$\frac{d}{dx}(2) = (2)' \overset{KR}{=} \ln'(e^x)\cdot(e^x)' = \frac{d}{dx}(1) = 1$$

$$\ln'(e^x)\cdot e^x = 1$$

Sei $y = e^x$: $\ln'(y)\cdot y = 1$

$$\frac{d\ln(y)}{dy} = \ln'(y) = \frac{1}{y}$$

Allgemeiner Logarithmus: $f(x) = \log_a(x) = \dfrac{\log_e(x)}{\log_e(a)}$ (1)

$$f'(x) = \frac{d\log_a(x)}{dx} = \left(\frac{d}{dx}\log_e(x)\right)\frac{1}{\log_e(a)} = \frac{1}{x\log_e(a)} \quad (2)$$

Allgemeine Potenz: $f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln a}$ (3)

$g(g^{-1}(y)) = y$, mit $y = a^x$

weil e die Umkehrfkt. v. $\ln$ ist.

$= e^{v(x)}$ (4), $v(x) = x\ln a$ (5)

$$f'(x) = \frac{d\,a^x}{dx} = \underbrace{e^{x\ln a}\cdot\ln(a)}_{} = e^{\ln(a^x)}\cdot\underbrace{\ln(a)}_{v'} = a^x\ln a$$

(4)

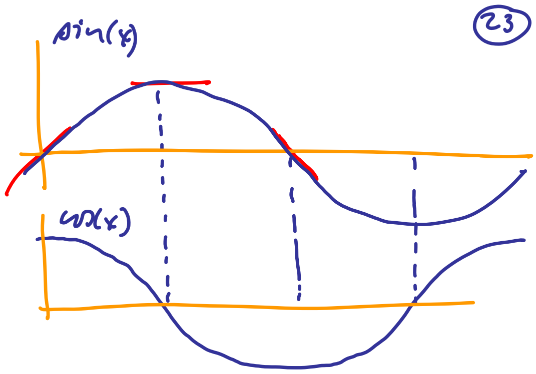
Im Detail: $= \dfrac{d}{dx}\left(e^{v(x)}\right) \overset{KR}{=} (e^v)'\cdot v' \overset{(20.4)}{=} e^v\cdot v' = e^{x\ln a}\ln a$

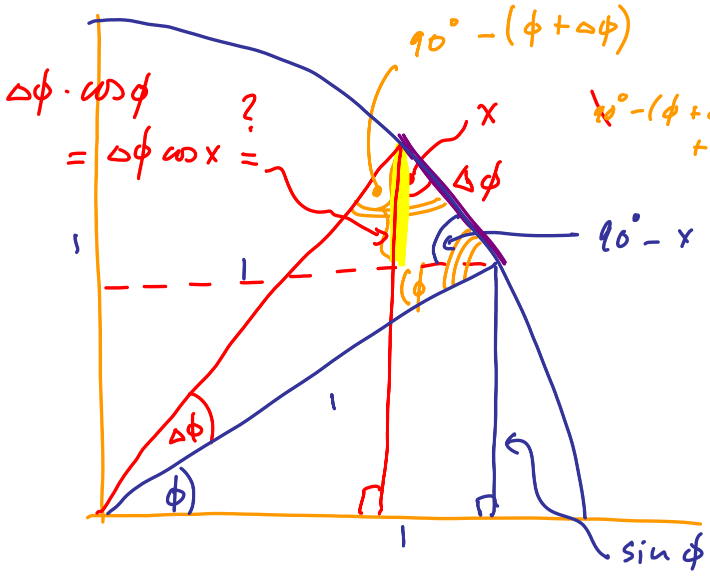
$v' \overset{(5)}{=} \ln a$

Trigonometrische Funktionen:

$u(x) = \sin(x)\,, \qquad u'(x) = \cos x$

$v(x) = \cos(x) \qquad v'(x) = -\sin x$





$\cancel{90°} - (\phi + \Delta\phi) + x = \quad = \quad = \cancel{90°} - x + \phi$

$2x = 2\phi - \Delta\phi$

$x = \phi - \cancel{\Delta\phi/2}$

$$\sin'\phi = \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{\sin(\phi + \Delta\phi) - \sin\phi}{\Delta\phi}$$

$$= \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{\cancel{\Delta\phi}\cos\phi + \cancel{\sin\phi} - \cancel{\sin\phi}}{\cancel{\Delta\phi}}$$

$$= \cos\phi$$

Falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ Bernoulli - L'Hôpital.

Falls $\lim f = \infty$