Mathe-Vorkurs, Blatt 02: Grenzwerte, Ableitungen

01.10.2013

Hausaufgabe 1: Nullstellen (*)
Berechne alle Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot x^2$

b) $f(x) = 2 \cdot x^5 - 8 \cdot x^3$

c) $f(x) = 16 \cdot x^4 - 40 \cdot x^2 + 9$

d) $f(x) = \cos(1 + x) - \frac{1}{2}$

Hausaufgabe 2: Trigonometrische Funktionen (*)

a) Berechne für ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $H = 3,12$ m und dem spitzen Winkel $\alpha = \frac{\pi}{6}$ die Längen der Gegenkathete G und der Ankathete A.

b) Berechne für ein rechtwinkliges Dreieck mit einem spitzen Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2.9}$ und zugehöriger Gegenkathete $G = 12$m die Längen der Ankathete A and Hypothenuse H.

c) Das Längenverhältnis der Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck beträgt $\frac{G}{A} = \frac{5}{7}$. Berechne die spitzen Winkel α und β.

Hausaufgabe 3: Grenzwerte (*)

Berechne die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(2\cdot x^2+5)^3$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3+2\cdot x}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^5-x^5}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\frac{1}{x}+2}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}$

f) $\lim\limits_{x\to 8}(5\cdot x+x^2-\dfrac{1}{8}\cdot x^3)$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2\cdot x}{x^3-8}$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2\cdot x-1}{1+5\cdot x}$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3-x^2}{1+2\cdot x^2}$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-3\cdot x+\sqrt{9\cdot x^2+4\cdot x-5})$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos x}$

n) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{e^x}$

o) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\ln x}$

p) $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{\ln x}{x-1}$

q) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$

r) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot \ln x)$

s) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$

t) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$

u) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

v) $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Hausaufgabe 4: Stetigkeit (*)

Untersuche, ob die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 (bzw. x_1 und x_2 in Aufgabe j) und k) stetig bzw. stetig ergänzbar ist. Zeichne ein Schaubild von $f(x)$ in der Umgebung von x_0.

a) $f(x)=|x|\,;\quad x_0=0$

b) $f(x)=\begin{cases}2\cdot x+3 & x\leq 1\\ 3\cdot x+1 & x>1\end{cases}\quad x_0=1$

c) $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}\quad x_0=0$

d) $f(x)=\begin{cases}4\cdot x-7 & x<2\\ 1 & x=2\\ x^2-4\cdot x+5 & x>2\end{cases}\quad x_0=2$

e) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leq 1\\ \sqrt{x} & x>1\end{cases}\quad x_0=1$

f) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}\quad x_0=1$

g) $f(x)=\begin{cases}\frac{2\cdot x^2-x-3}{x+1} & x\neq -1\\ -5 & x=-1\end{cases}\quad x_0=-1$

h) $f(x)=\dfrac{1}{x}\quad x_0=0$

i) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}\quad x_0=1$

j) $f(x)=\dfrac{x^2+2\cdot x-8}{x^2-3\cdot x+2}\cdot x_1=1, x_2=2$

k) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}\quad x_1=-1, x_2=1$

l) $f(x)=\dfrac{2\cdot x-2}{x^2-2\cdot x+1}\quad x_0=1$

m) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^3+8}\quad x_0=-2$

n) $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}\quad x_0=-2$

Hausaufgabe 5: Ableitungen (*)

Berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{5} \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - x$

b) $f(x) = \sqrt{1/2 \cdot x}$

c) $f(x) = 2 \cdot x \cdot (x - 3)$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

e) $f(x) = a \cdot x^b$

f) $f(x) = -3 \cdot x^{-4}$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

h) $f(x) = x^2 - 2^x + \lg x$

i) $f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{1}{4 \cdot x^4}$

j) $f(x) = (9 \cdot x^2 - 2) \cdot (3 \cdot x + 1)$

k) $f(x) = (7 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2) \cdot (\ln x - 4 \cdot x)$

l) $f(x) = (a \cdot x - b) \cdot (c \cdot x^2)$

m) $f(x) = (2 - 3 \cdot x) \cdot (1 + x) \cdot (x + 2)$

n) $f(x) = e^x \cdot (5 \cdot x - 3)$

o) $f(x) = (2 \cdot x^2 + 4) \cdot x^{-1}$

p) $f(x) = x \cdot \ln x$

q) $f(x) = \sin^2 x$

r) $f(x) = \tan x$

s) $f(x) = x^3 \cdot (\tan x) \cdot (\sin x - \cos x)$

t) $f(x) = \frac{4 \cdot x}{x + 5}$

u) $f(x) = \frac{2 \cdot x - 3}{x + 1}$

v) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

w) $f(x) = \frac{a \cdot x^2 + b}{c \cdot x + d}$

x) $f(x) = \frac{e^x + \cos x + \sqrt{x}}{\ln x - \sin x + x^{-2}}$

y) $f(x) = \frac{a \cdot x + b \cdot x^{-1}}{c \cdot x + d \cdot x^{-1}}$

z) $f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$

$\alpha)\quad f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

$\beta)\quad f(x) = (3 \cdot x^2 - 13)^3$

$\gamma)\quad f(x) = e^{\ln(x^2+4\cdot x)}$

$\delta)\quad f(x) = \sqrt{6 \cdot x^3 - 3 \cdot x + 2}$

$\epsilon)\quad f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$

$\zeta)\quad f(x) = \cos(5 \cdot x^4 - 3 \cdot x^2 + 2)$

$\eta)\quad f(x) = (a \cdot x + b)^4$

$\theta)\quad f(x) = \sin(3 \cdot x)$

$\iota)\quad f(x) = x \sin(\omega \cdot x + \alpha)$

$\kappa)\quad f(x) = \ln(\sin x) \quad (0 < x < \pi)$

$\lambda)\quad f(x) = \sin^2(3 \cdot x)$

$\mu)\quad f(x) = e^{(1-x^2)}$

$\nu)\quad f(x) = \sqrt{x} \cdot \left(\dfrac{1}{3} \cdot x^3 + x^{-1}\right)$

$\xi)\quad f(x) = \sin x \cdot \cos x$

$o)\quad f(x) = \sqrt{\dfrac{\ln x}{x^2}}$

$\pi)\quad f(x) = \dfrac{\sin(-x) \cdot (1 - x^3)}{x^2 + 12}$

$\rho)\quad f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 6)^2}$

$\sigma)\quad f(x) = x \cdot \ln(3 \cdot x^2)$

$\tau)\quad f(x) = \dfrac{\sin(x^2) \cdot (6 \cdot x^2 - x + 4)}{e^{3\cdot x^2 + 2\cdot x}}$

$\upsilon)\quad f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{2 \cdot x^2 - a}}$

$\phi)\quad f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) := \cosh x$

$\chi)\quad f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) := \sinh x$

$\psi)\quad f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} := \tanh x$

$\omega)\quad f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}\right)$