Mathematischer Vorkurs – Jan von Delft 30.9.13 ①

1. Funktionen

1.1 Zahlen

- natürliche Zahlen : $\mathbb{N}_0$: 0, 1, 2, 3, ...

  $\mathbb{N}$: 1, 2, 3, ...

- ganzen Zahlen : $\mathbb{Z}$: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

- rationale Zahlen: $\mathbb{Q}$: $q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$

andere Darstellungen: Dezimalbruch (entweder endlich, oder irgendwann periodisch)

②

$0{,}10100100010000 1 \ldots \notin \mathbb{Q}$

- reellen Zahlen : $\mathbb{R}$ Jede reelle Zahl läßt sich durch eine Folge von rationalen Zahlen approximieren:

z.B.: $\sqrt{2} = 1.4142 \ldots$

$$\simeq \underset{\substack{\shortparallel \\ q_1}}{\frac{14}{10}} = 1.4 \; , \; \underset{\substack{\shortparallel \\ q_2}}{\frac{141}{100}} = 1.41 \; , \; \underset{\substack{\shortparallel \\ q_3}}{\frac{1414}{1000}} = 1.414 \; ,$$

Folge: $q_1, \quad q_2, \quad q_3$

$\pi = 3{,}1415\ldots$, $e = 2{,}73\ldots$

- komplexe Zahlen: $\mathbb{C}$: Menge aller Zahlen der Form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i \equiv \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

Mathematatische Induktion

Beispiel: $S(N) = \sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + 3 + \ldots + N$

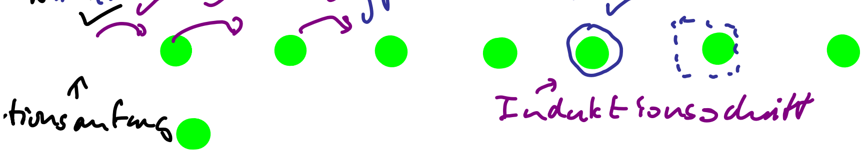
$S(6) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 7 + 7 + 7$

$= 3 \cdot 7 = \frac{N}{2} \cdot (1 + N)$

$S(5) = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 5 + 5 + 5$

$= 3 \cdot 5 = \left(\frac{N+1}{2}\right) \cdot N$

Induktions-Hypothese: $S(N) \overset{?}{\underset{N \in \mathbb{N}}{=}} \frac{N}{2} \cdot (N+1)$



Beweis per Induktion:

Gegeben: Ausdruck: $S(N) = \sum_{n=1}^{N} n$ (1)

Induktionshypothese (IH): $S(N) = \frac{N}{2} \cdot (N+1)$ (2)

Induktionsanfang: $S(1) \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{1} n = 1 \underset{(2)}{\overset{?}{=}} \frac{1}{2}(1+1) = 1$ (3)

Induktionsschritt: nehme an, IH gilt für N,

zeige, dass sie auch gilt für $N+1$, d.h., daß $S(N+1) \overset{?}{=} \frac{(N+1)}{2}(N+1+1)$

$S(N+1) \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{N+1} n = \sum_{n=1}^{N} n + (N+1) \overset{IH(2)}{=} \frac{N}{2}(N+1) + (N+1)$

(umformen)
(massieren)

$= (N+1)\left[\frac{1}{2}N + 1\right] = (N+1)\,\frac{1}{2}(N+2) \overset{!}{=}$

$N' = N+1$: $S(N') = N' \cdot \frac{1}{2}(N'+1)$

$\Rightarrow$ IH gilt auch für $N+1$, und somit für alle $N \in \mathbb{N}$!

Beispiel 2:

Ausdruck: $\tilde{S}_k(x) = 1 + x + x^2 + \dots x^k = \sum_{n=0}^{k} x^n$, $k \in \mathbb{N}_0$ (1)

IH: $\tilde{S}_k(x) = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$ (2). Zeige, daß IH gilt!

I-Anfang: stimmt IH für $k=0$? $\tilde{S}_0(x) \overset{(1)}{=} 1$ ✓

$\tilde{S}_0(x) \overset{(2)}{=} \frac{1 - x^{0+1}}{1 - x} = \frac{1-x}{1-x} = 1$

I-Schritt: Nehme IH an für k, zeige, daß sie auch gilt für $k+1$;

m.a.W., zeige, daß $1 + \dots + x^{k+1} = \frac{1 - x^{(k+1)+1}}{1 - x}$?!?

$\tilde{S}_{k+1}(x) \overset{(1)}{=} \underbrace{1 + x + \dots x^k}_{\tilde{S}_k(x)} + x^{k+1}$

$\overset{(2)}{=} \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} + x^{k+1}$ massieren. $= \frac{1 - x^{k+1} + (1-x)x^{k+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{k+2}}{1 - x}$ □

also gilt IH für $k+1$ ✓.

1.2 Grundrechengesetze

- Kommutativgesetz der Addition: $a + b = b + a$ (1)

- Assoziativgesetz " " : $(a + b) + c = a + (b + c)$ (2)

- Kommutativgesetz der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$ (3)

- Assoziativgestz " " : $(a \cdot b) c = a \cdot (b \cdot c)$ (4)

- Distributivgesetz $a(b + c) = ab + ac$ (5)

1.3 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Potenzieren: $x^n \equiv \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}^{n \text{ mal}}$ für $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ (1)

$\uparrow$ "ist definiert als" $\doteq$

Potenzgesetze: $x^n \cdot x^m = (x \cdot x \cdots x)^n (x \cdots x \cdot x)^m = x^{n+m}$ (2)

$$x^n \cdot y^n = (x \cdots x)^n (y \cdots y)^n \overset{(5.3)}{=} \overbrace{(xy)(xy) \cdots (xy)}^{n \text{ mal}} = (xy)^n \quad (3)$$

$$(x^m)^n = \underbrace{(x \cdots x)^m (x \cdots x)^m \cdots (x \cdots x)^m}_{n \text{ mal}} = x^{m \cdot n} \quad (4)$$

Mit Hilfe d. Potenzgesetze: $(x \in \mathbb{R},\ m,n \in \mathbb{N})$:

x^0: $(x \neq 0)$ $\quad x^0 \cdot x^n \overset{(2)}{=} x^{0+n} \doteq x^n \Rightarrow x^0 = 1$ (5)

x^{-n}: $\quad x^{-n} \cdot x^n \overset{(2)}{=} x^{-n+n} = x^0 \overset{(5)}{=} 1 \Rightarrow x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ (6)

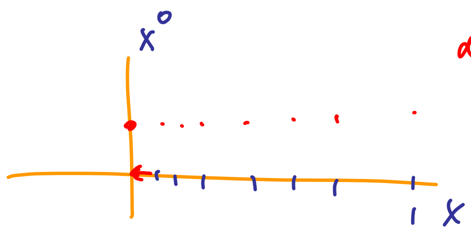
---

(6)$\cdot \frac{1}{x^n}$ $\quad x^{-n} \cdot \underbrace{x^n \frac{1}{x^n}}_{1} = 1 \cdot \frac{1}{x^n} \Rightarrow x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Frage: was ist 0^0 ?

$0^0 \equiv 1$ als Grenzwert der Folge $\{x^0;\ x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$

Physikerantwort:



Frage: was ist $\frac{1}{A}$

Per Def: $\frac{1}{A}$ ist die Zahl, für die gilt: $\frac{1}{A} \cdot A = 1$

und $A \cdot \frac{1}{A} = 1$.

$x^{\frac{1}{n}}$: $\quad \left(x^{1/n}\right)^n \overset{(7.4)}{=} x^{\frac{1}{n}\cdot n} = x^1 = x$

$(x>0)$

$\Longrightarrow \quad x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad$ (denn, per Def: $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$)

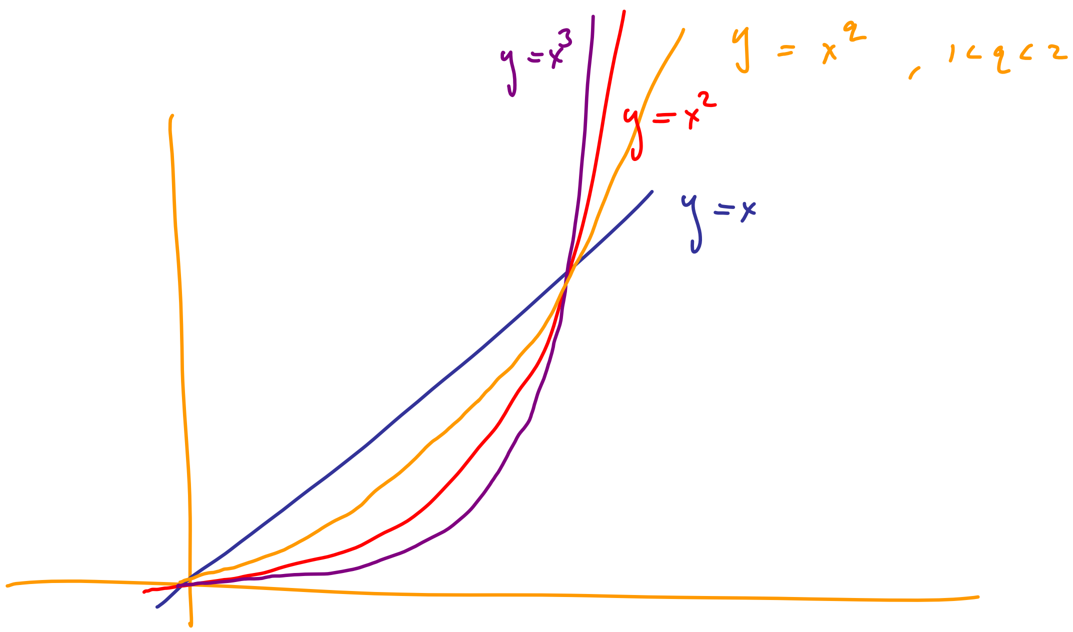
$x^{m/n}$: $\quad x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)^m = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$

$(x>0)$ $\qquad = \left(x^m\right)^{1/n} = \sqrt[n]{x^m}$

x^y: $y \in \mathbb{R}$ (nicht unbedingt rational, aber approximierbar durch rationale Zahlen: $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$)

x^y auch approximierbar $x^{q_1}, x^{q_2}, x^{q_3}$

Graphisch:



Logarithmen

(10)

$$y = x^{n} \quad \begin{array}{l} n \leftarrow \text{gegeben} \\ x \uparrow \text{gegeben} \end{array}$$

Umgekehrt: sei x, y bekannt, was ist n?

$$n = \log_x(y) \iff y = x^n \qquad (1)$$

"n ist der Logarithmus von y zur Basis x" ("log holt die Potenz runter")

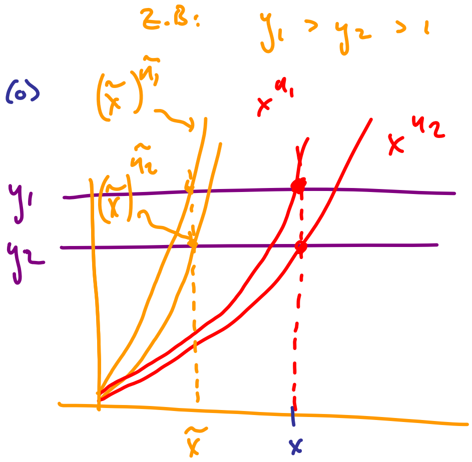
$\log_x(y)$ liefert Antwort auf die Frage: welche Potenz v. x liefert y? (zu welcher Potenz muss x genommen werden, um y zu bekommen).

Merkbeispiel: $10^3 = 1000 \iff 3 \ \log_{10}(1000)$

Rechengesetze

(11)

1) $$\log_x(y_1 \cdot y_2) = \log_x(y_1) + \log_x(y_2) \qquad (0)$$



Denn: sei
$$y_1 = x^{n_1} \qquad (1)$$
$$y_2 = x^{n_2} \qquad (2)$$

(10.1) $\Rightarrow$
$$n_1 = \log_x(y_1) \qquad (1')$$
$$n_2 = \log_x(y_2) \qquad (2')$$

$$y_1 \cdot y_2 \overset{(1,2)}{=} x^{n_1} \cdot x^{n_2} \overset{(7.2)}{=} x^{n_1+n_2} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \log_x(y_1 \cdot y_2) \overset{(10.1)}{=} (n_1 + n_2) \overset{(1',2')}{=} \log_x(y_1) + \log_x(y_2) \qquad (4)$$

□

(ii) $$\log_x(y_1/y_2) = \log_x(y_1) - \log_x(y_2) \qquad (1)$$

Denn:

$$\frac{y_1}{y_2} \overset{(11.1)(11.2)}{=} \frac{x^{n_1}}{x^{n_2}} \overset{(7.6)}{=} x^{n_1 - n_2} \qquad (2)$$

$$\log_x\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = n_1 - n_2 \overset{(11.1')(11.2')}{=} \log_x(y_1) - \log_x(y_2) \quad \square. \qquad (3)$$

iii) $$\log_x(y^n) = n \log_x(y) \qquad (4)$$

Denn:

$$y = x^m \overset{(10.1)}{\iff} m = \log_x(y) \qquad (5)$$

$$y^n = (x^m)^n \overset{(7.4)}{=} x^{m \cdot n} \qquad (6)$$

$$\log_x(y^n) = m \cdot n = n \cdot \log_x(y) \qquad (7)$$

$$\log_x(y^{-n}) = -n \log_x(y)$$

$$\log_x(y^{1/n}) = \frac{1}{n} \log_x(y)$$

Besondere Logarithmen:

$a = 10$: $\log_{10}(x) = \lg(x)$

$a = 2$: $\log_2(x) = \mathrm{ld}(x)$

$a = e = 2.71\ldots$ $\log_e(x) = \ln(x)$

$[\, f(x) = e^x \,, \quad f'(x) = e^x \,]$

iv) was ist $\log_b(x)$, ausgedrückt durch $\log_a(x)$

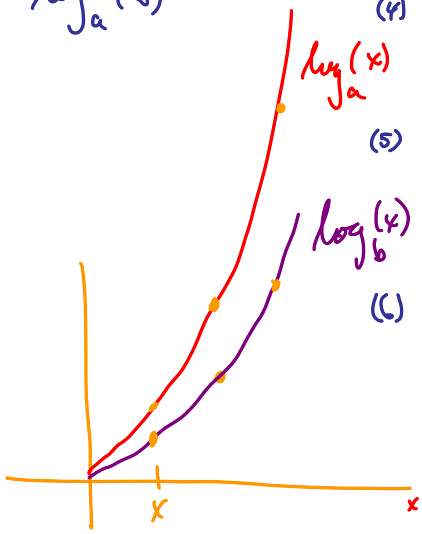
Sei: $y = \log_b(x)$ (1) $\overset{(10.1)}{\Longrightarrow}$ $x = b^y$ (2)

Sei: $b = a^m$ (3) $\overset{(10.1)}{\Longrightarrow}$ $m = \log_a(b)$ (4)

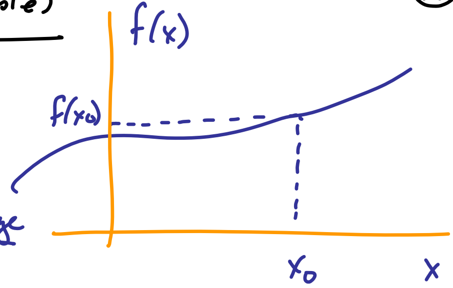
(2): $x = b^y \overset{(3)}{=} (a^m)^y \overset{(7.4)}{=} a^{m \cdot y}$ (5)

(10.1), (5): $\log_a(x) = m \cdot y \overset{(4)}{=} y \log_a(b)$ (6)

$$\log_b(x) = y = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$



1.4 Funktionen einer Veränderlichen (= Variable)



Eine Funktion f ist eine Abbildung, die jedem Element x aus der Definitionsmenge (D_f), genau ein Element $f(x)$ aus einer Zielmenge zuordnet.

Notation: f : Definitionsmenge $\longrightarrow$ Zielmenge

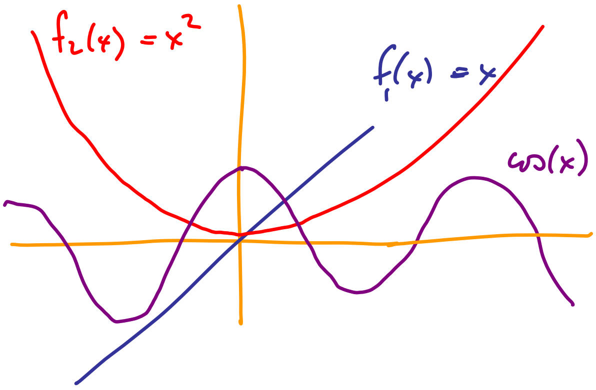
$x \longmapsto f(x)$

Argument — Abbildungsvorschrift — Zielelement / Bildelement

Heute: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^2$

16



$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} = B_{f_1}$

$x \mapsto f_1(x) = x$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = \{ y \in \mathbb{R},\ y \geq 0 \}$ $= B_{f_2} \subset \mathbb{R}$

$x \mapsto f_2(x) = x^2$

Zielmenge

$f_3 : \mathbb{R} \to [-1, 1] = B_{f_3} \subset \mathbb{R}$

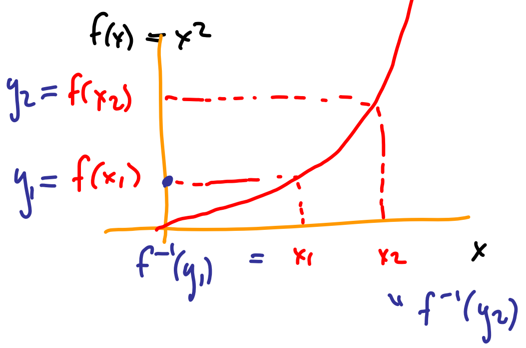
$x \mapsto f_3(x) = \cos(x)$

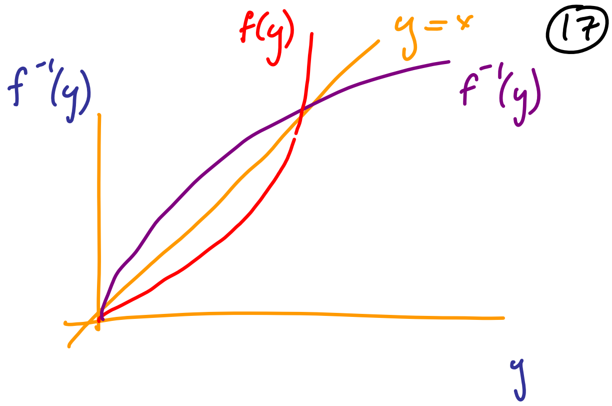
Alle Elemente der Zielmenge, die beim Einsetzen der D_f tatsächlich erreicht werden, bilden die Bildmenge (= Wertemenge) (das Bild) B_f von f.

$$B_f = \{ f(x);\ x \in D_f \}$$

17

Umkehrfunktion:



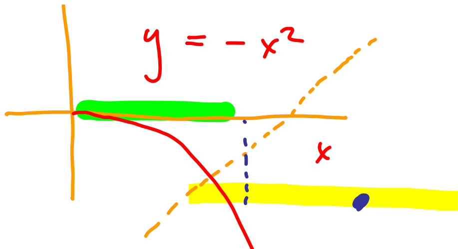


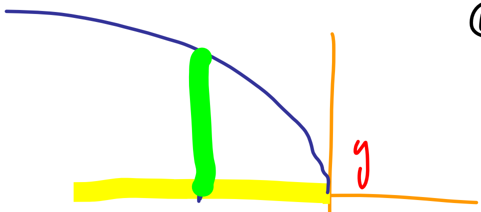
Def: Falls es zu jedem $y \in B_f$ genau ein $x \in D_f$ gibt (1-1-Zuordnung), mit $y = f(x)$, so definiert dies auch wieder eine Funktion, „f^{-1}", die "Umkehrfunktion":

$f : D_f \to B_f$ | $f^{-1} : B_f \to D_f$ | $D_{f^{-1}} = B_f$

$x \mapsto f(x) = y$ | $y \mapsto x = f^{-1}(y)$ | $B_{f^{-1}} = D_f$

Beispiel:





$f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^-$ ------- (1).

$x \mapsto y = f(x) = -x^2$

$y = -x^2$

$x^2 = -y$

$x = \sqrt{-y}$

$f^{-1}: \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$

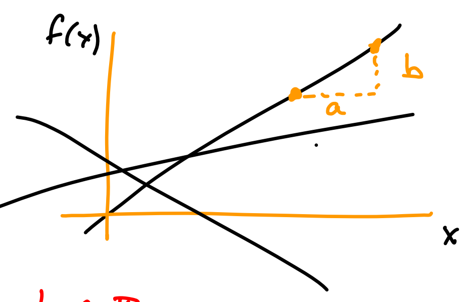
$y \overset{f^{-1}}{\mapsto} x = f^{-1}(y) = \sqrt{-y}$ (2)

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = f^{-1}(-x^2) = \sqrt{-(-x^2)} = \sqrt{x^2} = x$ ✓

$f(f^{-1}(y)) = f(\sqrt{-y}) = -(\sqrt{-y})^2 = -(-y) = y$ ✓

1.4.1 Lineare Funktionen

①



Def: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Schnittpunkt mit y-Achse

$x \mapsto f(x) = mx + t \quad , \; m, t \in \mathbb{R}$

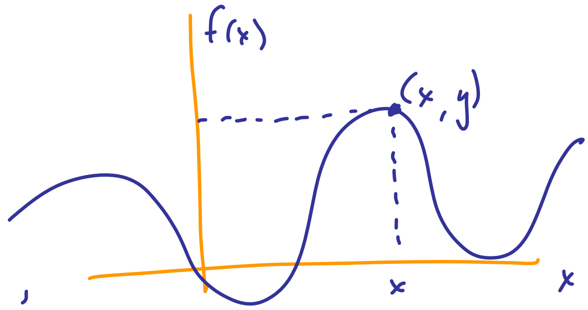
"lineare Funktion"

Steigung $= b/a$

ist eindeutig bestimmt durch Angabe von 2 Punkten auf der Kurve.

Allgemein: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = y$



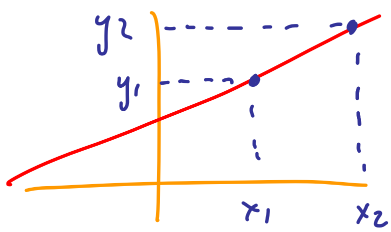
Graph v. f: $G_f = \{ (x,y) : x \in D_f ,\; y = f(x) \in B_f \}$

②

Zurück zu lin. Funktionen:

Seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei Punkte auf G_f:

Dann: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $t = ?$



$$f(x) = (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + y_1$$

Check: $f(x_1) = (x_1 - x_1) \left(\frac{\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot} \right) + y_1 = y_1$ ✓

1.4.2 Polynom-Funktion

③

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \quad , \quad a_j \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}_0$$

"Polynom n-ten Grades": $a_n \neq 0$ Beisp:

$n = 1$: "lineare Funktion" $x \mapsto 2x + 1$

$n = 2$: "Parabel" $3x^2 + 2x - 1$

$n = 3$: "kubisches Polynom" $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$n = 4$: "quartisches Polynom" $4x^4 + \dots$

Nullstellen v. Polynomen

④

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad , \; n \in \mathbb{N}_0, \; a_j \in \mathbb{R}$$

Gesucht: "Nullstellen v. $P(x)$", d.h. die x-Werte, für die $P(x) = 0$.

Satz: Eine Polynomfunktion vom Grad n hat genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ und höchstens n Nullstellen in $\mathbb{R}$. (1)

Ein Polynom n-ten Grades mit der Nullstelle x_1 kann in die Form $P(x) = (x - x_1)\,\tilde{P}(x)$ geschrieben werden, wobei $\tilde{P}(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades ist.

Beispiel 1: Sei $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}(x - 4/3) \Rightarrow x_1 = 4/3$ (5)

Bsp 2: $g(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{array}$

Bsp: $h(x) = x^3 + 5x^2 - 22x - 56$, Tipp: $\underline{x_1 = 4}$ ist eine Nullstelle.

Bestimme $\hat{P}(x)$, so dass $h(x) = (x-4)\,\hat{P}(x)$

$$x^3 + 5x^2 - 22x - 56 = (x-4)(\underline{1}\cdot x^2 + \underline{9}\,x + \underline{14})$$

x^3 $\quad -4x^2 \quad 9x^2 \quad -36x \quad 14x \quad -56$

? ? ?

Nochmal, mit "Polynomdivision": $\tilde{P}(x) = \dfrac{P(x)}{x-4}$ (6)

$$\begin{array}{l} (x^3 + 5x^2 - 22x - 56) : (x-4) = x^2 + 9x + 14 \\ \underline{-(x^3 - 4x^2)} \\ \quad +9x^2 - 22x \\ \quad \underline{-(9x^2 - 36x)} \\ \qquad 14x - 56 \\ \qquad \underline{-(14x - 56)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow P(x) = (x-4)(\underbrace{x^2 + 9x + 14}_{\text{Nullstellen?}})$$

Nullstellen? Inspektion $= (x+2)(x+7)$

Nullstellen einer quadratischen Funktion: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ⑦

"Mitternachts-Formel": Nullstellen $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

"Quadratische Ergänzung:"

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x + \underline{\overset{?}{\tfrac{b}{2a}}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} = -c$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c4a + b^2}{4a \cdot a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nebenrechnung:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \cancel{a}\left(x^2 + \underbrace{\cancel{2} \cdot \frac{b}{\cancel{2a}} \cdot x}_{bx}\right) + \underbrace{a \cdot \frac{b^2}{4a^2}}_{b^2/4a}$$

Angewendet auf $\tilde{P}(x) = x^2 + 9x + 14$ ⑧

$$b = 9, \quad c = 14$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \left\{\begin{matrix} -2 \\ -7 \end{matrix}\right.$$

$$\tilde{P}(x) = (x - x_1)(x - x_2) = (x+2)(x+7) \checkmark$$

<u>Satz 4.1 bedeutet:</u> Jedes Polynom n-ten Grades kann geschrieben werden als:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

wobei x_j, $(j = 1, \dots, n)$ die Nullstellen sind, $x_j \in \mathbb{C}$.

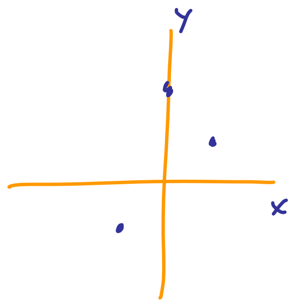
Ein Polynom n-ten Grades ist eindeutig festgelegt durch Angabe von $n+1$ „Daten":

z.B.: $a_0, a_1, \ldots, a_n$

Oder: $n+1$ Punkte auf dem Graph: $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots (x_{n+1}, y_{n+1})$

Bsp: Sei $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

mit 3 Punkten auf G_f: $(0,2), (-1,1), (1,1)$



Strategie: setze Punkte auf G_f ein $\Rightarrow$ 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten a_2, a_1, a_0.

$(0,2)$: $2 = f(0) = a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0 \Rightarrow a_0 = 2$

$(-1,-1)$: $-1 = f(-1) = a_2(-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0$

$= a_2 - a_1 + 2$

$\Rightarrow a_2 - a_1 = -3$ (1)

$(1,1)$: $1 = f(1) = a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0$

$= a_2 + a_1 + 2$

$\Rightarrow a_2 + a_1 = -1$ (2)

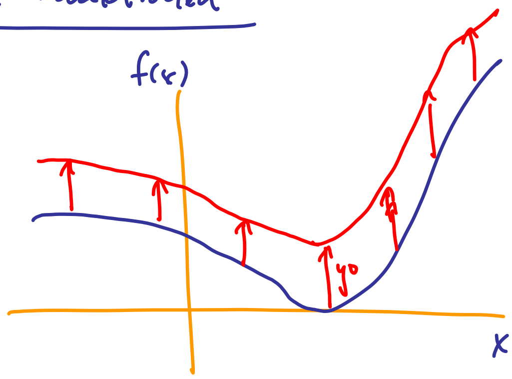
(1) + (2): $2a_2 = -4 \Rightarrow a_2 = -2$

(2) − (1) $2a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = 1$

Verschieben, Strecken von Graphen v. Funktionen

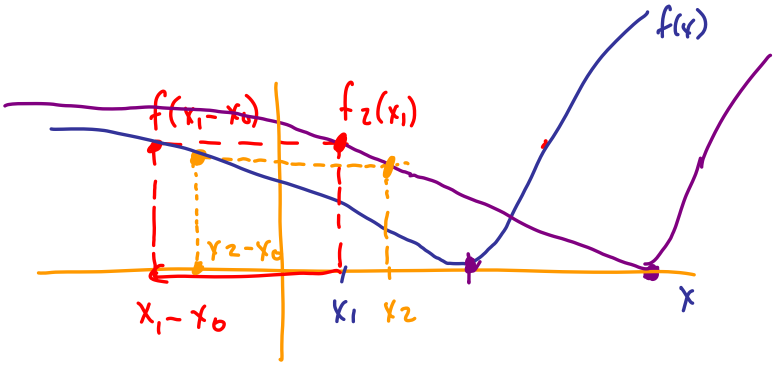
Verschieben in y-Richtung.

$$f_1(x) = f(x) + y_0$$



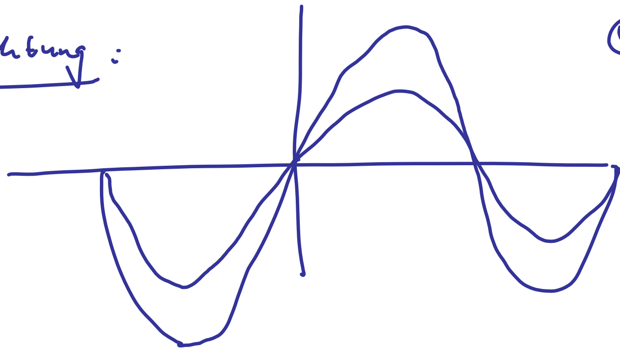
Verschieben in x-Richtung: $(x_0 > 0)$

$$f_2(x) = f(x - x_0)$$



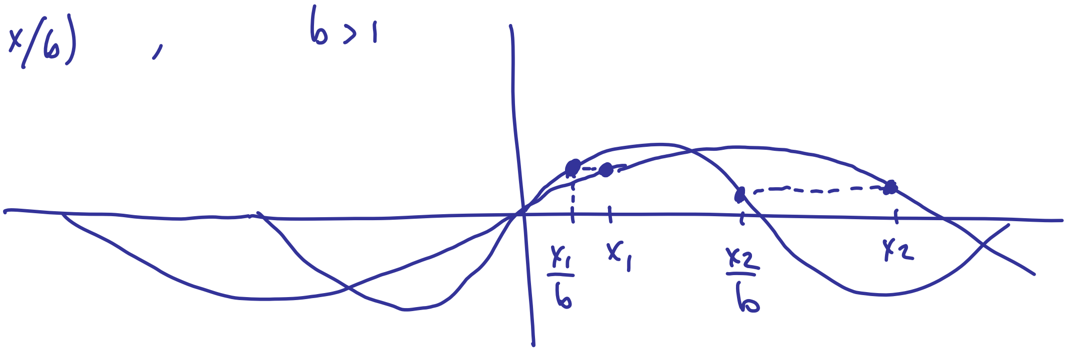
Strecken um einen Faktor in y-Richtung:

$$f_3(x) = a f(x)$$



Strecken um Faktor in x-Richtung:

$$f_4(x) = f(x/b) \quad , \quad b > 1$$



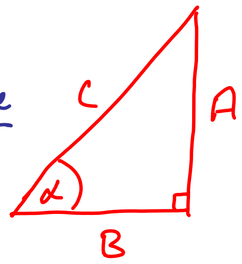
Kombinationen: $f_5(x) = a f\left(\frac{x - x_0}{b}\right) + y_0$

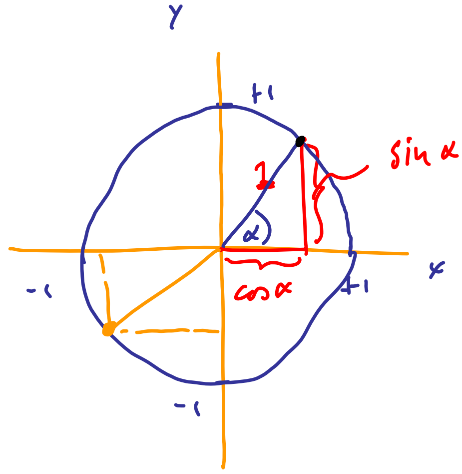
nicht gleich!! $f_6(x) = a\left[f\left(\frac{x}{b} - x_0\right) + y_0\right]$

1.4.4 Trigonometrische Funktionen

Im rechtwinkligem Dreieck:

$$\sin\alpha \equiv \frac{A}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$





$$\cos\alpha \equiv \frac{B}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

Pythagoras: $A^2 + B^2 = c^2 \Rightarrow \frac{A^2}{c^2} + \frac{B^2}{c^2} = 1$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Def: Sinusfunktion $\sin : R \longrightarrow [-1,1]\ \mathbb{R}$

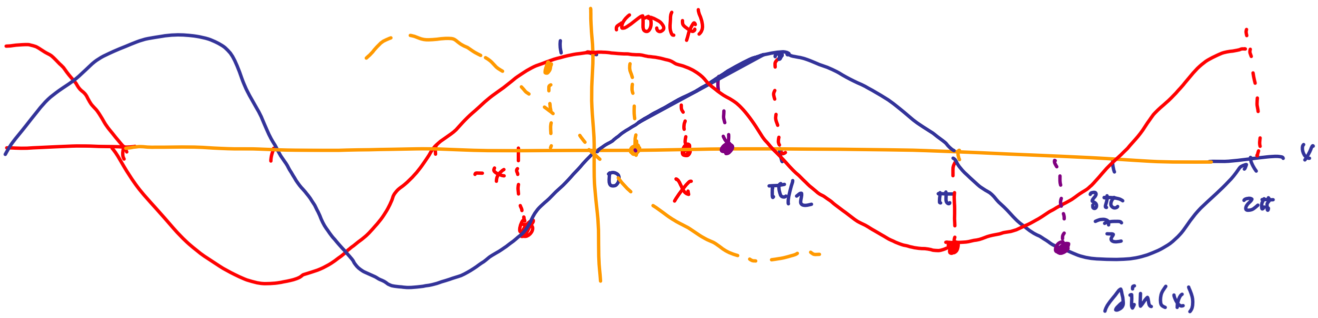
$x \longmapsto \sin x$, mit $\sin(x) = \sin(x + n2\pi)$

$n \in \mathbb{Z}$ "periodische Fortsetzung"

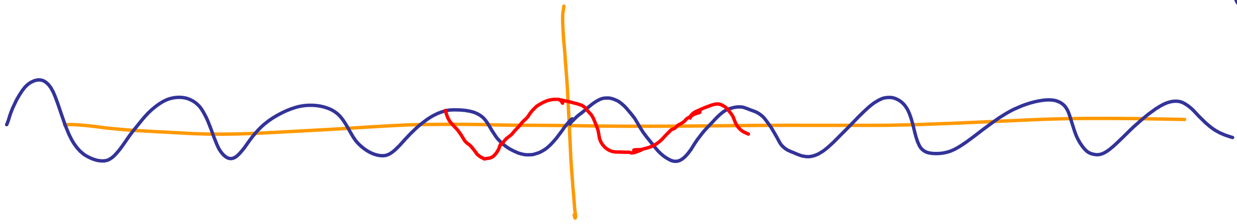
Cosinusfunktion $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]\ \mathbb{R}$

$x \longmapsto \cos x$, mit $\cos(x) = \cos(x + n2\pi)$

$360^\circ = 2\pi$



15



Sin & cos sind periodische Fktn, mit Periode 2π.

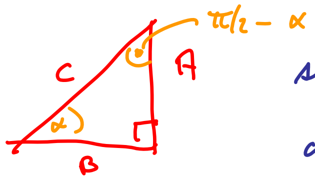
Allg: "periodische Fkt" hat Periode L falls: $f(x+L) = f(x)$ $\forall x$.

$\sin(-x) = -\sin(x)$ ("punktsymmetrisch zum Ursprung")

$\cos(-x) = \cos x$ ("Achsensymmetrisch zur y-Achse")

$\sin(\pi/2 - x) = \cos x = B/C$

$\cos(\pi/2 - x) = \sin x = A/C$

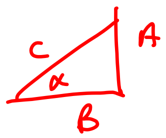


$\sin(x+\pi) = -\sin x$

$\cos(x+\pi) = -\cos x$

16

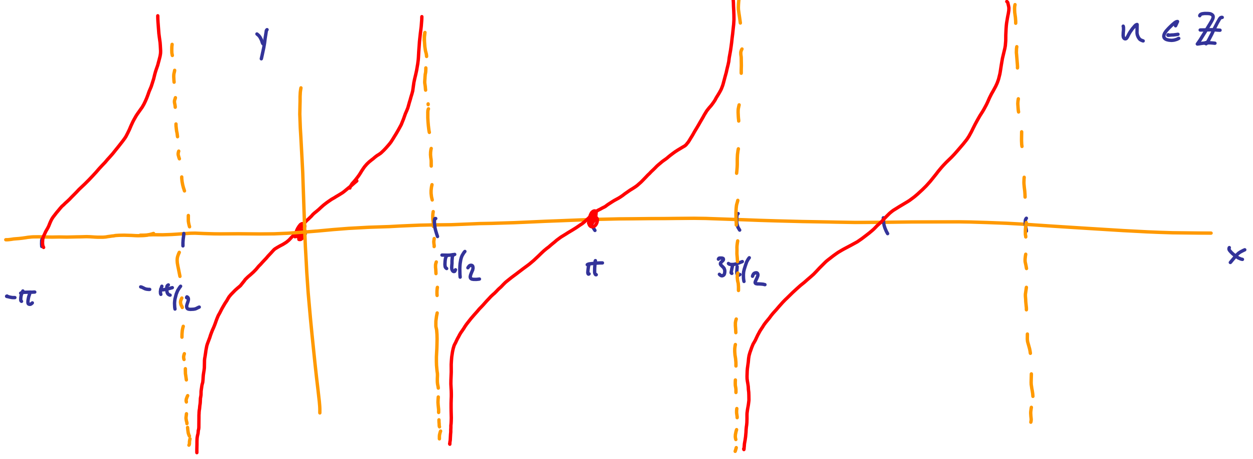
Tangens:



$\tan\alpha = \frac{A}{B} = \frac{(A/C)}{(B/C)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$f: \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{\text{Nullstellen des Cosinus}\}}_{\pi/2 + m\pi,\ m \in \mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$

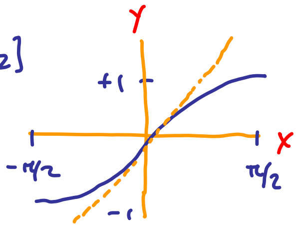
$x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, mit $\tan(x) = \tan(x + \cancel{2}\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$



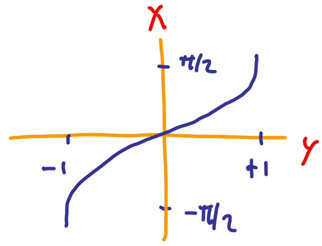
Umkehrfunktionen v. Trig. Funktionen:

Sin, Cos, Tan, sind im gesammten Def-Bereich nicht umkehrbar, wohl aber in Teilbereichen, wo sie monoton sind.

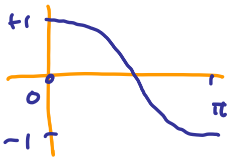
sin in $[-\pi/2, \pi/2]$



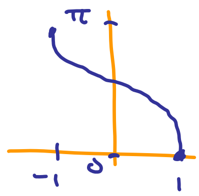
arsin "Arcsinus"



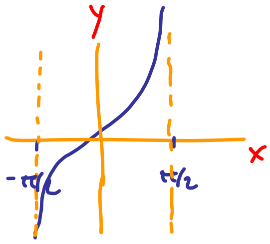
cos in $[0, \pi]$



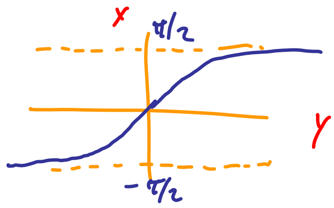
arcos "Arcosinus"



tan in $[-\pi/2, \pi/2]$



arctan "Arc tangens"



$\arcsin[\sin(x)] = x$

$\arccos[\cos(x)] = x$

Bsp: $x = \pi/2$, $\sin x = 1$

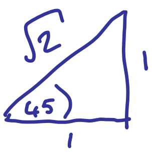
$\arcsin 1 = \pi/2$ ✓

Additionstheoreme:

$$\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \sin B \cos A$$

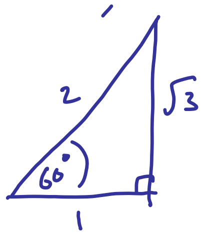
$$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \sin B$$

Spezielle Winkel: $\alpha = 45°$, $\alpha = \pi/4$



$\Rightarrow \sin \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha = 60^\circ$, $\quad \alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi}{3}$



$$\sin \pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \pi/3 = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x + \pi/3) = \sin x \cos \pi/3 + \sin \pi/3 \cos x$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$$

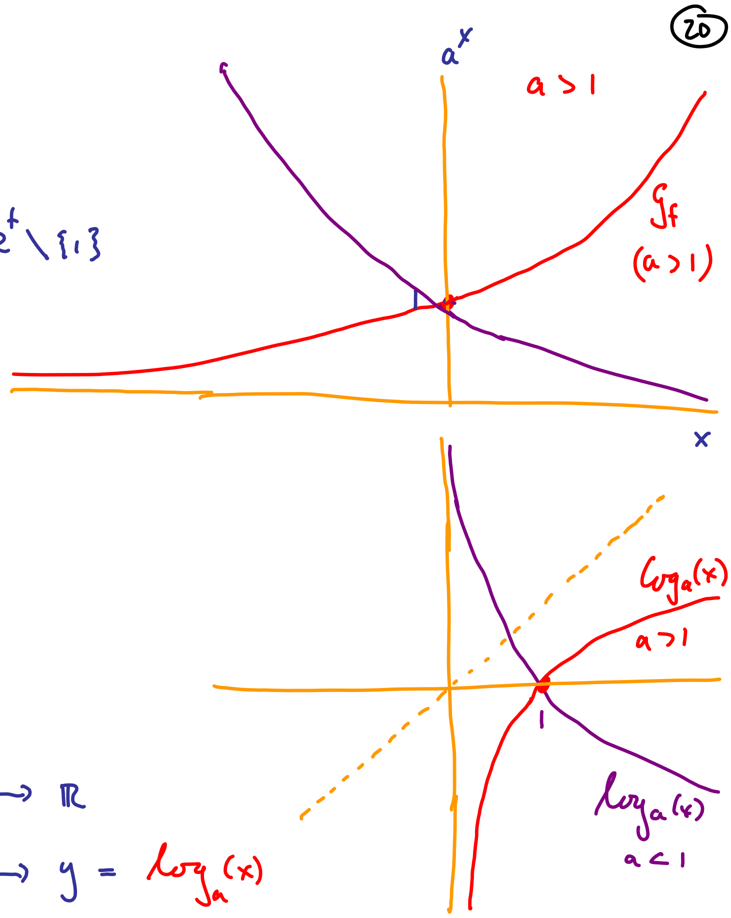
1.4.5 Exponentialfunktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \longmapsto y = a^x, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$a > 1$: $\quad a^x \xrightarrow{x \to \infty} \infty$, $\quad a^x \xrightarrow{x \to -\infty} 0$

$a < 1$: $\quad a^x \xrightarrow{x \to \infty} 0$, $\quad a^x \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$



Umkehrfunktion: $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto y = \log_a(x)$$

Beispiel: Gegeben: $y = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1+(x/a)^2}\right)$ (21)

↑ natürlich Logarithmus:

Finde Umkehrfunktion! (also, Finde x als Funktion von y).

Startpunkt: $e^y = e^{\ln\left(x/a + \sqrt{1+x^2/a^2}\right)} = x/a + \sqrt{1+x^2/a^2}$

$$e^y - x/a = \sqrt{1+(x/a)^2}$$

$$(e^y - x/a)^2 = 1 + x^2/a^2$$

$$-(e^y)^2 + 2e^y \cdot \frac{x}{a} + \cancel{\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)} = -1 + \cancel{\left(-x^2/a^2\right)}$$

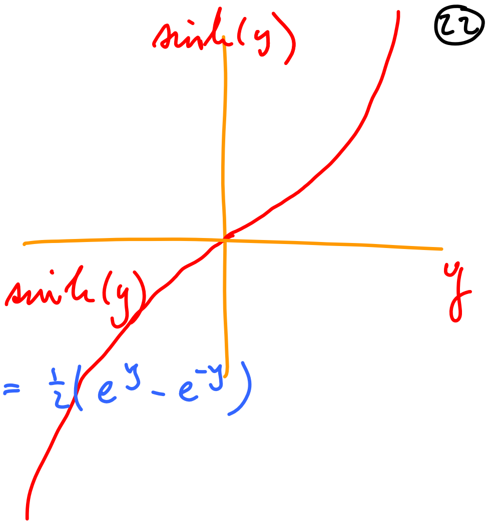
$$2e^y \frac{x}{a} = e^{2y} - 1$$

(22)

$$\frac{x}{a} = \frac{e^{2y}-1}{2e^y} = \frac{1}{2}(e^{2y}-1)e^{-y}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2y-y} - e^{-y})$$

$$x = a\underbrace{\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})}_{\equiv\ \sinh(y)\ =\ \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})} = a\sinh(y)$$



$\sinh(y)$ = "Sinus Hyperbolicus"

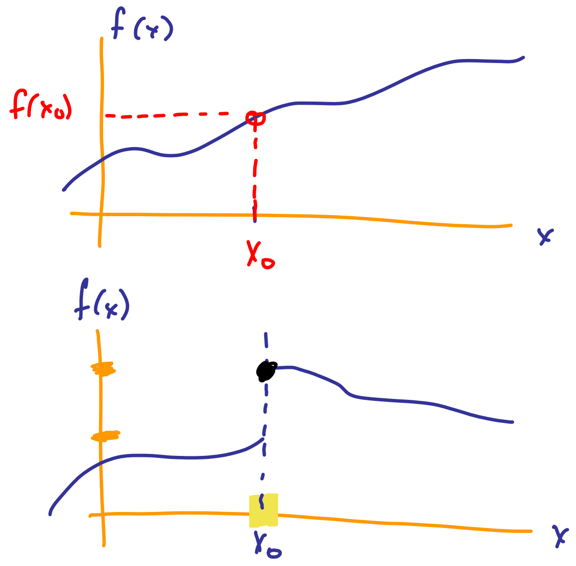
$$x = a\sinh(y)$$

$$\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \sinh^{-1}(\sinh y)) = y = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1+(x/a)^2}\right)$$

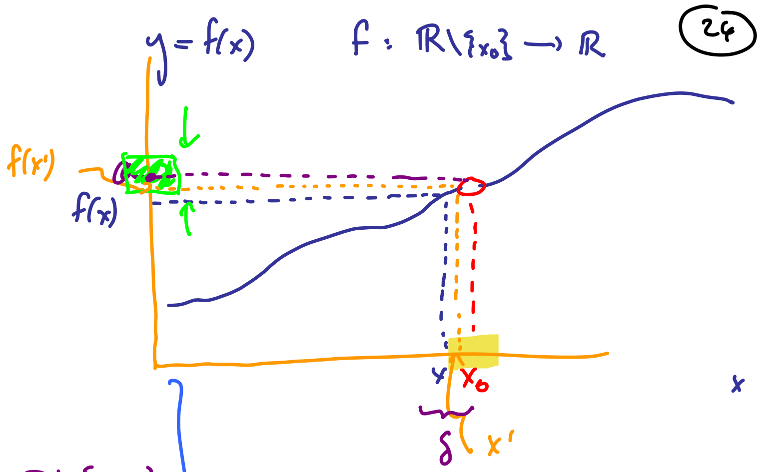
Es gilt übrigens: $\sin y = \frac{1}{2}(e^{iy} - e^{-iy})$ $\quad i = \sqrt{-1}$

2. Grenzwerte

2.1. Allgemeine Grenzwerte



$f: \mathbb{R}\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$



Gegeben sei eine Funktion f und ein Wert $x_0 \in \mathbb{R}$, und ein x-Wert, dessen Umgebung in D_f liegt:

es gibt $\delta > 0$, so, daß

$$]x-\delta, x+\delta[\;\subset D_f = \mathbb{R}\setminus\{x_0\}$$

Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 einen Grenzwert, a, falls es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle

$x \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$, gilt: $f(x) \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

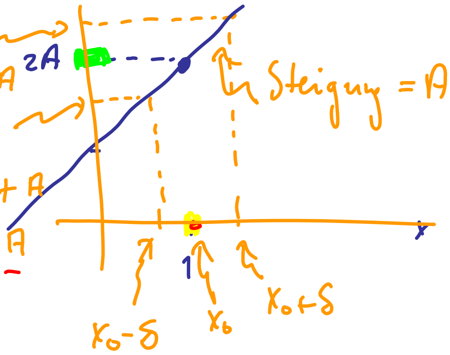
Beispiel: $f(x) = A\,\dfrac{x^2-1}{x-1}$ " $= \dfrac{A(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = A(x+1)$ "

Grenzwert: $x \to x_0 = 1$?

Antwort: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 2A$

$2A+\varepsilon = f(x_0+\delta) = A(x_0+\delta+A$

$2A-\varepsilon = f(x_0-\delta)$
$= A(x_0-\delta)+A$
$= A - A\delta + A$



"Beweis": Für $\varepsilon > 0$, wähle $\delta = \varepsilon/A$,

dann gilt für alle $x \in\,]1-\delta, 1+\delta[\setminus \{1\}$, dass $f(x) = A(x+1)$

Somit: $f(x) \in\,]f(1-\delta), f(1+\delta)[$

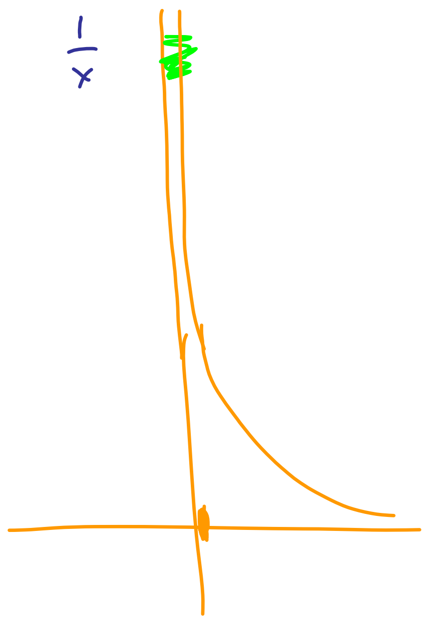
$= \,]A(1-\delta+1), A(1+\delta+1)[$

$= \,]A(2-\delta), A(2+\delta)[\;=\;]2A-\varepsilon, 2A+\varepsilon[$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2A$

$\Uparrow$

Beispiel, wo Grenzwert nicht existiert: $\dfrac{1}{x}$



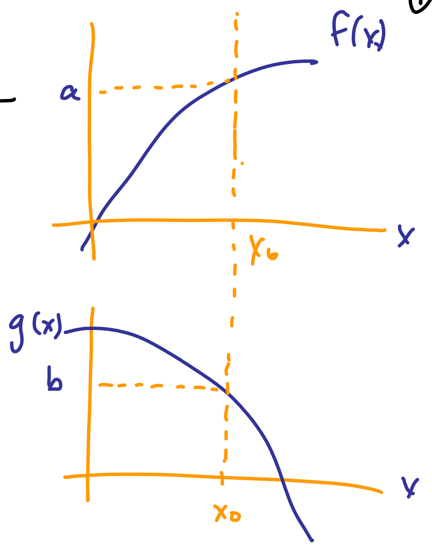
Vorlesung III

2.10.13

1

2.2 Praktische Anwendungen v. Grenzwerten

Sätze über Grenzwerte



Für Grenzwerte (auch ∞, rechtsseitig, oder linksseitig) von Funktion gilt:

Aus $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, folgt

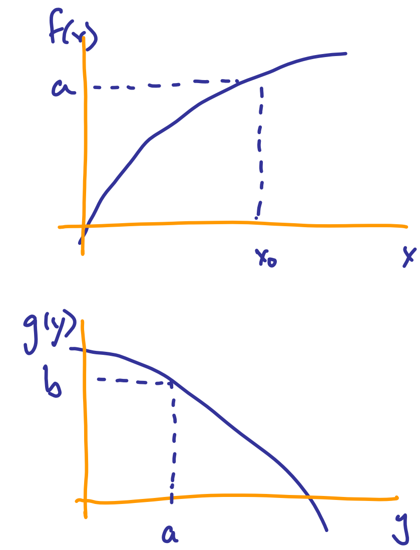
i) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(c\, f(x) + d\, g(x) \right) = c \cdot a + d \cdot b$

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = a \cdot b$, (iii) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$

2

Bsp: $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\frac{a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \right] = \lim\limits_{x \to \infty} \left[\frac{a_2 + a_1/x + a_0/x^2}{b_2 + b_1/x + b_0/x^2} \right] = \frac{a_2}{b_2}$

iv) Sei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{y \to a} g(y) = b$

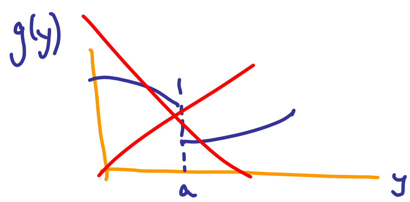


$\lim\limits_{x \to x_0} g(\underbrace{f(x)}_{a}) = b$

FALLS g, f 'hinreichend gutartig'!

sind (keine Sprünge, usw.,

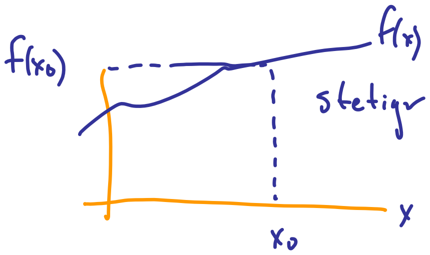
sonst existieren Limites nicht).

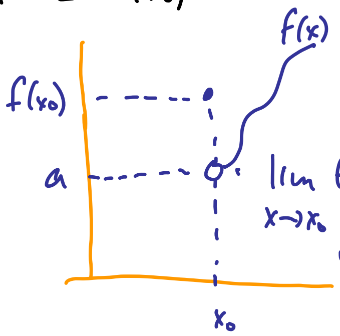


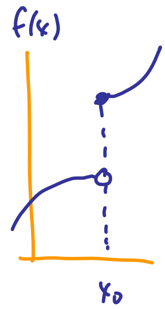
2.3 Stetigen Funktion

Def.: $f(x)$ ist bei $x_0 \in D_f$ stetig, falls

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und $= f(x_0)$





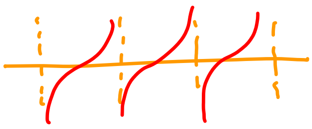


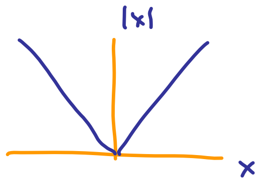
Falls $f(x)$ bei jedem $x_0 \in D_f$ stetig ist, heißt Funktion "stetig"

Beispiele v. stetigen Funktion:

- Polynome
- sin, cos, tan, $\log_a(x)$, a^x, $|x|$

für jeden Ast getrennt

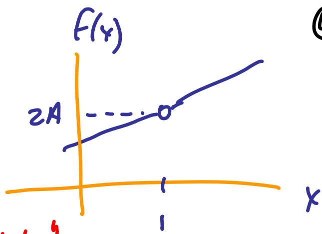




z.B.: $f(x) = A\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \frac{A(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}$ $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

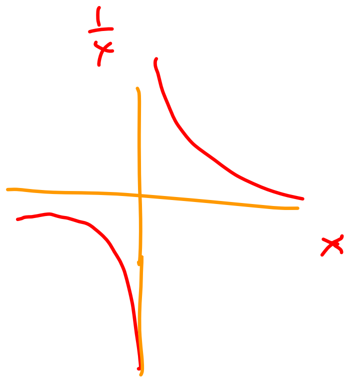
$\forall x \neq 1: \quad f(x) = A(x+1)$

"Definitionslücke"



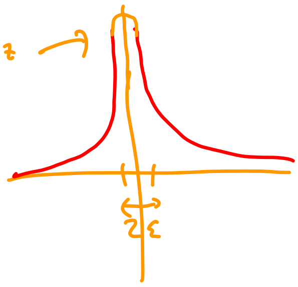
Definieren: $f(x=1) = 2A$ "Fortsetung"

Was wäre für $f(x) = \frac{1}{x}$ bei $x=0$



Divergenz

$g(x) = \frac{1}{|x|}$



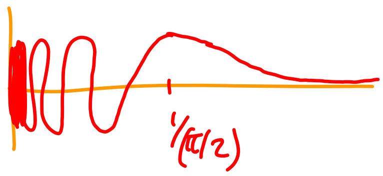
$\hat{g}(x) = \frac{1}{|x|+\varepsilon}$, ⑤

2.3.2 Unstetigkeitsstellen : dort, wo $f(x)$ nicht stetig ist

"$\forall$" = "für alle"

Bsp: $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow [-1,1]$

$$x \longmapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \forall x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



2.3.3 Hebbare Definitionslücken

Sei $f(x)$ bei x_0 nicht definiert, aber $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ existiere,

"x_0 ist eine hebbare Definitions=lücke"

dann läßt sich f zu $\tilde{f}$ "fortsetzen" durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in D_f \\ a & \forall x = x_0 \end{cases}$$

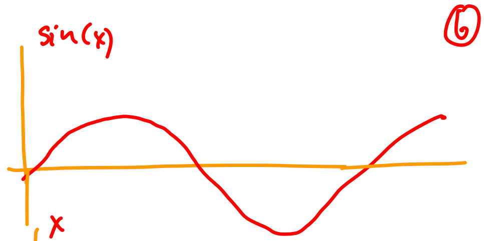
"stetige Fortsetzung von f"

Bsp: siehe Seite 4.

⑥

Weniger triviales Beispiel:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \forall x \neq 0$$

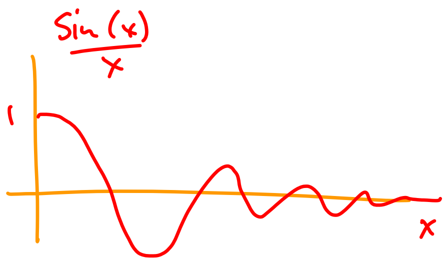


$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} (x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0} = ?$$

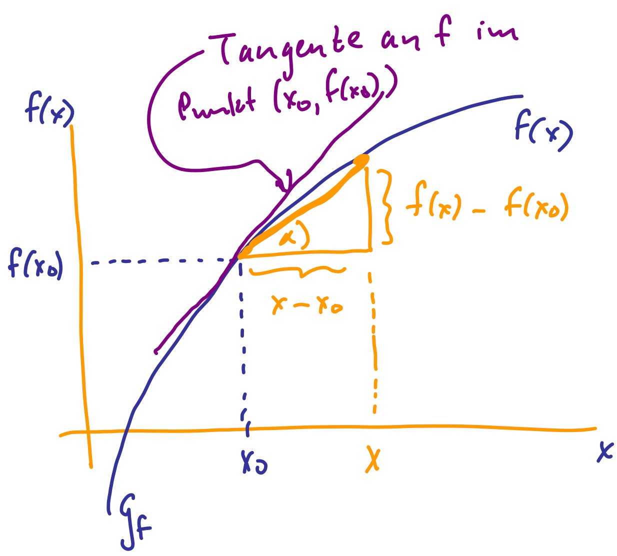
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \underset{\text{(l'Hopital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin'(x)}{x'} = \frac{\cos x}{1}\Big|_{x=0} = 1$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \forall x \neq 0 \\ 1 & \forall x = 0 \end{cases}$$



3. Differentialrechnung

3.1 Differentialquotient



$f(x)$ sei stetige Funktion:

Steigung von 

$= \tan\alpha = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Steigung von f bei x_0 $= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

"Differentialquotient" von f bei x_0 : $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \in D_f \setminus \{x_0\}$

3.2 Ableitung

$f(x)$ ist bei x_0 "differenzierbar" falls $\underbrace{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$ existiert.

$\equiv$ "Ableitung v. f. bei x_0"

Notationen:

$$f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x = x_0} \equiv \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d_x f(x)\Big|_{x_0}$$

"f-Strich" "df nach dx" bei x_0 "d nach dx von f(x)" bei x_0 "d-x von f"

$f'(x_0)$ gibt Steigung an von der Tangente an den Graph G_f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Satz: Jede differenzierbare Fkt. ist stetig.

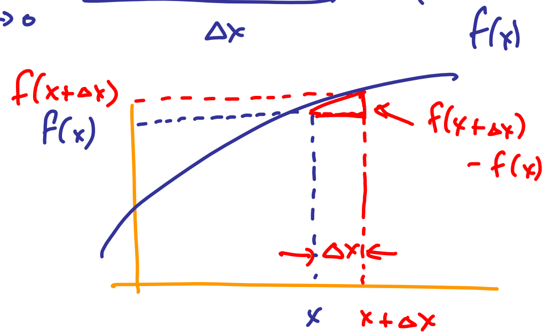
3.3 Ableitungsfunktion

$$f: D_f \subset \mathbb{R} \to W_f \subset \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

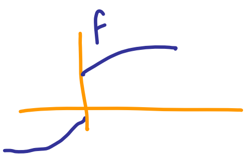
heißt "differenzierbar", wenn sie an jeder Stelle $x \in D_f$ differenzierbar ist (im Sinne von 3.2)

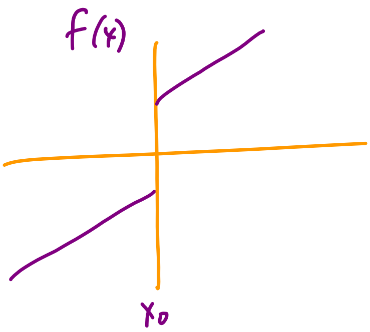
"Ableitungsfunktion" = "Ableitung v. f":

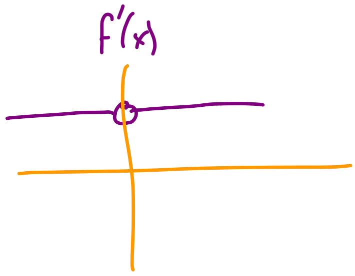
$$f': D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$



"f differenzierbar" ⟺ "f' stetig ist"







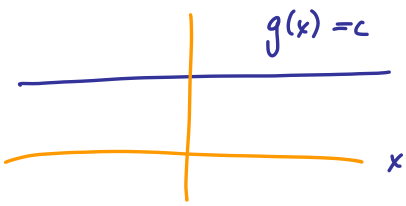
Ableitungsregeln

1) Ableitung einer Konstanten:

$$g(x) = c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 0$$

denn $g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x} = 0$



2) Linearkombination von zwei (diff.) Funktionen, u, v :

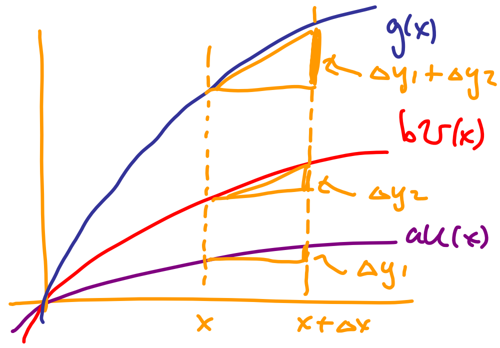
$$g(x) = a\,u(x) + b\,v(x), \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

"g ist linear in u und v" $\Longleftrightarrow$ u, v kommen nur zur ersten Potenz vor.

"g ist nicht-linear in u oder v" $\Longleftrightarrow$ z.B. $g(x) = u^2(x)$

$g(x) = \sin(u(x))$

$$g'(x) = a\,u'(x) + b\,v'(x)$$



Beweisidee:

$$g'(x) \overset{(9.1)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[a\,u(x+\Delta x) + b\,v(x+\Delta x)] - [a\,u(x) + b\,v(x)]}{\Delta x}$$

$$= a \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\right] + b \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right]$$

$$\overset{(9.1)}{=} a\,u'(x) + b\,v'(x)$$

3. Produktregel (PR)

$$g(x) = u(x)\, v(x) \qquad (1)$$

$$g'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$$

13

Beweisidee:

$$g'(x) \overset{(9.1)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{①}{u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x)} \overbrace{- \overset{②}{u(x)\, v(x+\Delta x)} + \overset{③}{u(x)\, v(x+\Delta x)}}^{=0} - \overset{④}{u(x)\, v(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\left(\overset{①}{u(x+\Delta x)} - \overset{②}{u(x)}\right) v(x+\Delta x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[u(x) \frac{\left(\overset{③}{v(x+\Delta x)} - \overset{④}{v(x)}\right)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right] \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) + \left[\lim_{\Delta x \to 0} u(x) \right] \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x) \implies (1)$$

14

Frage:

$$h(x) = u(x)\, v(x)\, w(x)$$

$$h'(x) = [u v] \cdot w$$

$$= [u v]' \cdot w + [u v] \cdot w'$$

$$= [u' v + u v'] w + u v w'$$

$$= u' v w + u v' w + u v w'$$

4) Kettenregel:

$$g(x) = u(v(x))$$

$$g'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

"nachdifferenzieren"

15

Bsp 1: $u(x) = 2x^2 \qquad v(x) = 3(x+1) \qquad g(x) = 2(3(x+1))^2$

$u'(x) = 2 \cdot 2x = 4x \qquad v'(x) = 3 \qquad g'(x) = 2 \cdot 2(3(x+1)) \cdot 3 = 36(x+1)$

Bsp 2: $f(x) = \left(\frac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 10\right)^5 \qquad \frac{d\,y^\alpha}{dy} = \alpha\, y^{\alpha-1}$

$$f'(x) = 5\left(\tfrac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 10\right)^4 \cdot \left[\tfrac{1}{5} \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 0\right]$$

16

Beweisidee: $g'(x) \overset{(9.1)}{=} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$

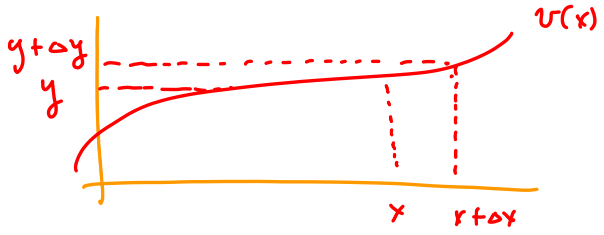
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\left(\frac{u(v(x+\Delta x)) - u(v(x))}{v(x+\Delta x) - v(x)}\right) \cdot \frac{(v(x+\Delta x) - v(x))}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(y+\Delta y) - u(y)}{(\cancel{y}+\Delta y) - \cancel{y}}\right] \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= u'(y) \cdot v'(x) = u'(v(x))\, v'(x)$$

$y = v(x)$

$y + \Delta y = v(x + \Delta x)$



5\. Quotientenregel $\qquad g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ (17)

N = Nenner = v

Z = Zähler = u

A = Ableitung

$$g'(x) = \frac{v(x)\,u'(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2} = \frac{NAZ - ZAN}{v^2}$$

Beweisidee: (Anwendung v. Kettenregel / Produktregel)

$$g(x) = u(x)\,v^{-1}(x)$$

Produktr.

$$g'(x) = u'(x)\,v^{-1}(x) + u(x)\underbrace{(v^{-1})'(x)}_{-\frac{1}{v^2(x)}\cdot v'(x)} = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}$$

Kettenregel: $g(x) = s(t(x))$ $\qquad s(y) = \frac{1}{y}$, $t(x) = v(x)$

$$g'(x) = s'(t(x))\,t'(x) \qquad s'(y) = -\frac{1}{y^2}$$

$$= -\frac{1}{y^2}\cdot t'(x) = -\frac{1}{s(y)^2}\cdot t'(x)$$

Ableitungen v. speziellen Funktion: (18)

i) Potenz: $\quad f_n(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$; $\quad f'(x) = n\,x^{n-1}$

Beweisidee: Induktion!

IH: $f_n'(x) = n\,x^{n-1}$

I-Anfang: $n = 1$, $f_1(x) = x$, $f_1'(x) = 1 \overset{?}{=} 1 \cdot x^{1-1} = 1$

I-Schritt: Für gegebenes n gelte: $f_n(x) = x^n \Rightarrow f_n'(x) = n\,x^{n-1}$

Betrachte nun: $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x = f_n(x)\cdot x$

Berechne Ableitung: $f_{n+1}'(x) \overset{PR}{=} (x^n)'\cdot x + x^n\cdot(x)'$

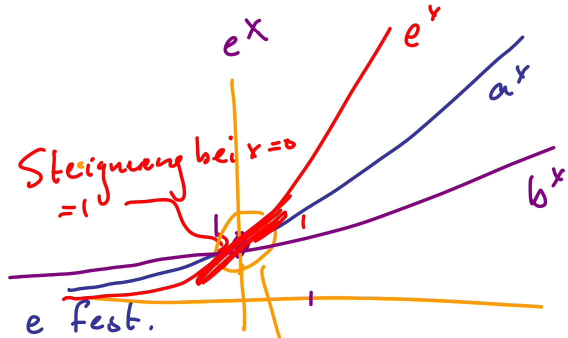
$$\overset{IH}{=} (n\,x^{n-1})\cdot x + x^n \cdot 1$$

$$= x^n(n+1) = (n+1)\,x^{(n+1)-1} \Longrightarrow$$

IH gilt auch für $n' = n+1$ □

Analog: $g(x) = x^{\alpha}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \alpha\, x^{\alpha - 1}$ (19)

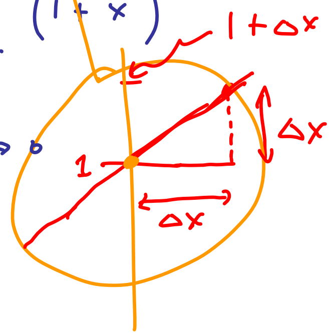
Exponentialfunktion:



$h(x) = e^{x},$

mit e so gewählt, dass $h'(0) = 1$ $\Big\} \Rightarrow$ legt e fest.

dann gilt: $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x}) = \lim\limits_{x\to 0}(1 + 1\cdot x) = \lim\limits_{x\to 0}(1 + x)$



oder $e^{\Delta x} \simeq 1 + \Delta x$ für $\Delta x \to 0$

$e^{\Delta x} - 1 \simeq \Delta x$

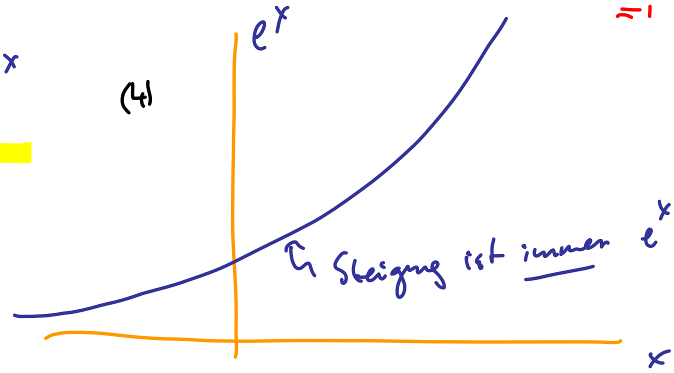
Berechne nun Ableitung von e^{x}:

(20)

$$h'(x) = (e^{x})' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{e^{x+\Delta x} - e^{x}}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x}\cdot e^{\Delta x} - e^{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{x}\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)}_{=1}$$

$$\Longrightarrow \quad (e^{x})' = \frac{de^{x}}{dx} = e^{x} \qquad (4)$$



Was ist $\dfrac{d}{dx}a^{x} = ?$

Kommt gleich!

21

Logarithmus: $f(x) = \ln(x) = \log_e(x)$ (1)

per Def.

Beweisidee: Ausgangspunkt: $\ln(e^x) = \log_e(e^x) = x$ (2)

$$\frac{d}{dx}(2) = (2)' \overset{KR}{=} \ln'(e^x)\cdot(e^x)' = \frac{d}{dx}(1) = 1$$

$$\ln'(e^x)\cdot e^x = 1$$

Sei $y = e^x$: $\ln'(y)\cdot y = 1$

$$\frac{d\ln(y)}{dy} = \ln'(y) = \frac{1}{y}$$

22

Allgemeiner Logarithmus: $f(x) = \log_a(x) = \dfrac{\log_e(x)}{\log_e(a)}$ (1)

$$f'(x) = \frac{d\log_a(x)}{dx} = \left(\frac{d}{dx}\log_e(x)\right)\frac{1}{\log_e(a)} = \frac{1}{x\log_e(a)} \quad (2)$$

Allgemeine Potenz: $f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln a}$ (3)

$g(g^{-1}(y)) = y$, mit $y = a^x$

weil e die Umkehrfkt. v. ln ist.

$= e^{v(x)}$ (4), $v(x) = x\ln a$ (5)

$$f'(x) = \frac{d\,a^x}{dx} = \underbrace{e^{x\ln a}\cdot\ln(a)} = e^{\ln(a^x)}\cdot\underbrace{\ln(a)}_{v'} = a^x\ln a$$

(4)

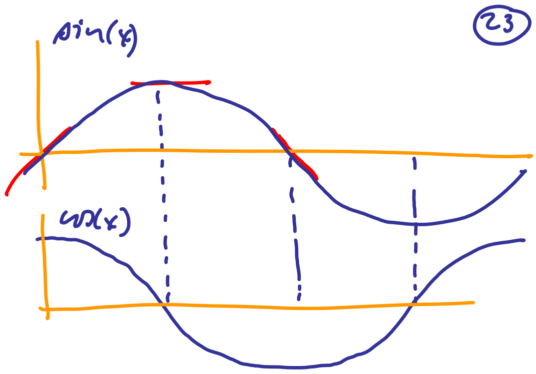
Im Detail: $= \dfrac{d}{dx}\left(e^{v(x)}\right) \overset{KR}{=} (e^v)'\cdot v' \overset{(20.4)}{=} e^v\cdot v' = e^{x\ln a}\ln a$

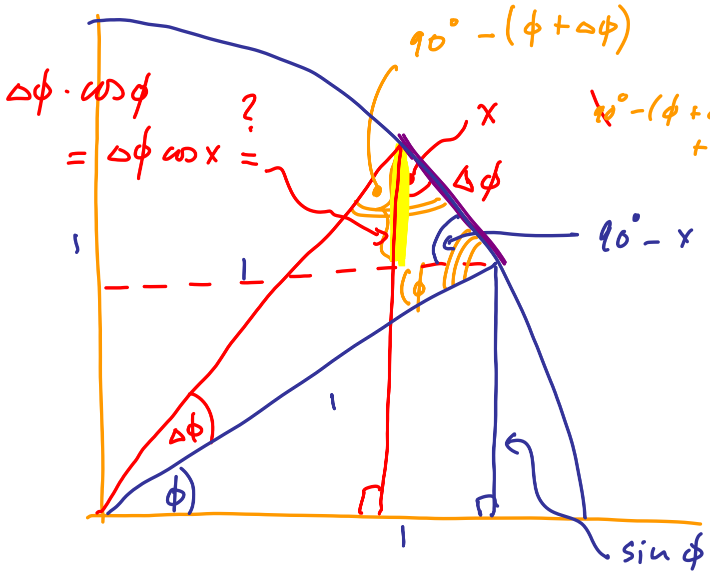
$v' \overset{(5)}{=} \ln a$

Trigonometrische Funktionen:

$u(x) = \sin(x)$, $\quad u'(x) = \cos x$

$v(x) = \cos(x)$ $\quad v'(x) = -\sin x$





$\cancel{90}^\circ - (\phi + \Delta\phi) + x = \quad = \quad = \cancel{90}^\circ - x + \phi$

$2x = 2\phi - \Delta\phi$

$x = \phi - \cancel{\Delta\phi/2}$

$$\sin'\phi = \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{\sin(\phi + \Delta\phi) - \sin\phi}{\Delta\phi}$$

$$= \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{\cancel{\Delta\phi} \cos\phi + \cancel{\sin\phi} - \cancel{\sin\phi}}{\cancel{\Delta\phi}}$$

$$= \cos\phi$$

Falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{Bernoulli - L'Hôpital.}$$

Falls $\lim f = \infty$

Ableitung spezieller Funktionen (Fortsetzung):

$$u(x) = \sin(x), \qquad u'(x) = \cos(x) \tag{1}$$

$$v(x) = \cos(x), \qquad v'(x) = -\sin(x) \tag{2}$$

Bsp. 1

$$t(x) \equiv \tan(x) \qquad t'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

$$= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad \sec(x) \equiv \frac{1}{\cos(x)} = \text{"secans"}$$

Quotientenregel

$$t'(x) = \frac{\cos \cdot \sin' - \sin \cos'}{\cos^2(x)} = \frac{\overbrace{\cos \cdot \cos - \sin(-\sin)}^{=1}}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \tag{3}$$

Bsp. 2 $\cot(x) \equiv \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \text{"cotangens"}, \quad \dfrac{1}{\sin(x)} \equiv \operatorname{cosec}(x)$ (1)

$$\cot'(x) = \frac{\sin(-\sin) - \cos(\cos)}{\sin^2} = \frac{-1}{\sin^2} = -\operatorname{cosec}^2(x) \tag{2}$$

Bsp. 3 $\dfrac{d}{dx} \arctan(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ (3)

Beweisidee: Ausgangspunkt: $\dfrac{d}{dx} \arctan(\tan(x)) = \dfrac{d}{dx} x = 1$ (4)

Kettenregel: $\arctan'(\tan(x)) \cdot \underbrace{\tan'(x)}_{(1.3) = \frac{1}{\cos^2 x}} = 1$ (5)

(5) $\cdot \cos^2 x$: $\arctan'(\tan(x)) = \cos^2 x$ (6)

Substitution (führe neue Variable ein): $\tan(x) = y$ (7)

③

Nebenrechnung:

$$y = \tan(x) \qquad (1)$$

$$y^2 = \tan^2 = \frac{\sin^2}{\cos^2} = \frac{1-\cos^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} - 1 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + y^2 \qquad (3)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+y^2} \qquad (4)$$

(2.6):

$$\arctan'(y) = \left(\cos^2(x)\right) \overset{(4)}{=} \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$$

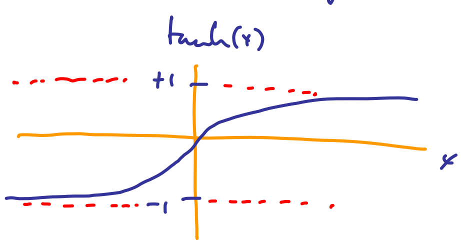
Endergebnis: $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$

④

Bsp. 3:

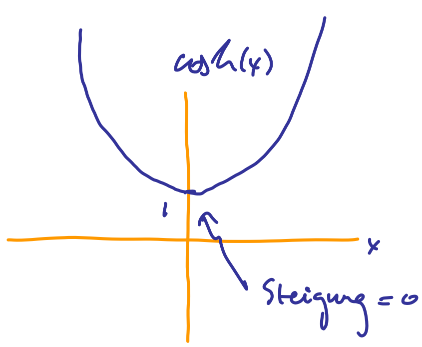
$$f(x) = \tanh(x) \equiv \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad (1)$$

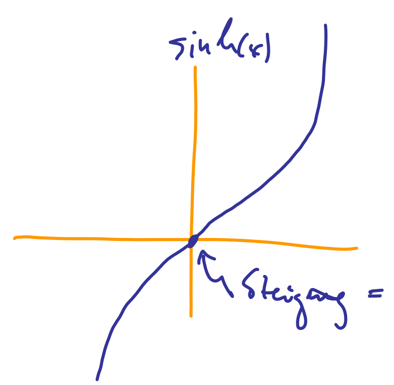
"tangens hyperbolicus"



$$\sinh(x) \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (2)$$

$$\cosh(x) \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (3)$$





$$\sinh'(x) \overset{(4.2)}{\underset{(KR)}{=}} \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\cdot(-1)\right) \overset{(4.3)}{=} \cosh(x) \qquad (1)$$ ⑤

$$\cosh'(x) \overset{(4.3)}{=} \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}(-1)\right) \overset{(4.2)}{=} \sinh(x) \qquad (2)$$

sehr analog!

Vergleiche: $\sin'(x) = \cos(x)$ (3)

$\cos'(x) = -\sin(x)$ (4)

Grund: $\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$ (5)

$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ (6)

Also gilt: $\sin(x) = \frac{1}{i}\sinh(ix)$

$\cos(x) = \cosh(ix)$

$$\tanh'(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\cosh\cdot\cosh - \sinh\cdot\sinh}{\cosh^2} \qquad (1)$$ ⑥

$$= \frac{1}{\cosh^2(x)} \equiv \operatorname{sech}^2(x) \qquad (2) \qquad \frac{1}{\cosh(x)} \equiv \operatorname{sech}(x) \qquad (3)$$

→ "secans hyperbolicus"

Nebenrechnung:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{1}{4}\left[(e^{x}+e^{-x})^2 - (e^{x}-e^{-x})^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\cancel{e^{2x}} + 2\cdot\underbrace{e^{x}\cdot e^{-x}}_{=1} + \cancel{e^{-2x}}\right) - \left(\cancel{e^{2x}} - 2\underbrace{e^{x}\cdot e^{-x}}_{=1} + \cancel{e^{-2x}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2+2\right] = 1 = \cosh^2(x) - \sinh^2(x) \qquad (4)$$

(4) ist analogon zu $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$ (5)

Bsp 4: Lange Kettenregel!

$$f(x) = \sin^2\left(\sqrt{x^2+1}\right) \qquad (1)$$

$$f'(x) \overset{(7)}{=} 2\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)\cdot \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\,. \qquad (3)$$

$$\overset{(5)}{=} \sin\left(2\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (4)$$

Identität: $2\sin y\cdot\cos y = \sin(2y)$ (5)

$$f(x) = P\Big(Q\big(R\big(S\,(T(x)\,)\big)\big)\Big) \qquad (6)$$

$$f'(x) = P'(Q)\,Q'(R)\,R'(S)\,S'(T)\,T'(x) \qquad (7)$$

$P(x_1) = x_1^2$

$Q(x_2) = \sin x_2$

$R(x_3) = \sqrt{x_3}$

$S(x_4) = x_4 + 1$

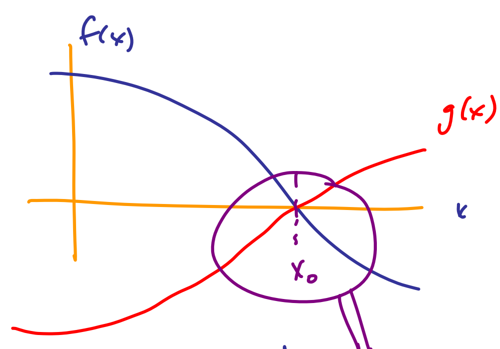
$T(x_5) = x_5^2$

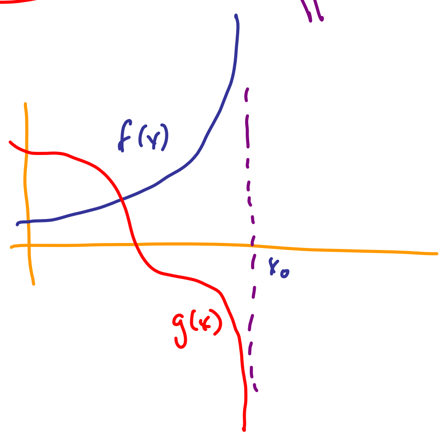
3.5 Regel v. Bernoulli - L'Hopital

$$L = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \;?$$

Falls $f(x)$ und $g(x)$ beide bei x_0 den Grenzwert 0, oder beide den Grenzwert $\pm\infty$ haben, aber in einer Umgebung v. x_0 differenzierbar sind, gilt:

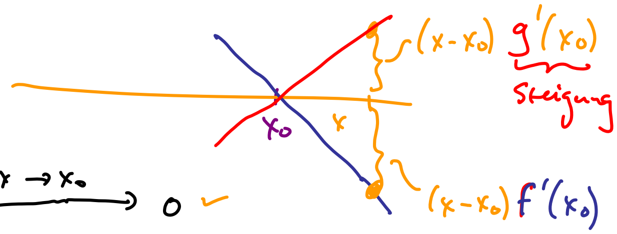
$$L = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$





Beweisidee: (für $f(x_0) = g(x_0) = 0$):

In der Nähe von x_0 gilt:



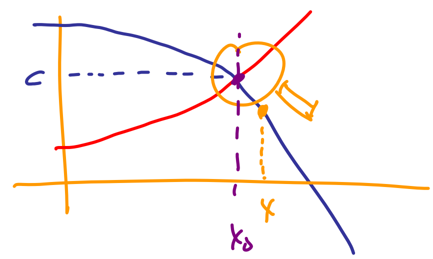
$$\left.\begin{aligned} f(x) &\simeq (x-x_0)\, f'(x_0) \\ g(x) &\simeq (x-x_0)\, g'(x_0) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{für } x \to x_0} 0 \checkmark$$

↳ "Linearisieren der Funktion"

$$L = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}\, f'(x_0)}{\cancel{(x-x_0)}\, g'(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Warum funktioniert das nur falls $\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} = \dfrac{0}{0}$ oder $\pm\infty$?

Bsp: Falls $f(x_0) = g(x_0) = c$:



Dann liefert Linearisierung:

$$f(x) = c + (x-x_0)\, f'(x_0)$$

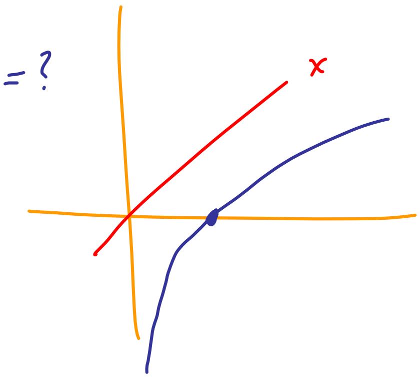
$$g(x) = c + (x-x_0)\, g'(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{c + \cancel{(x-x_0)}\, f'(x_0)}{c + \cancel{(x-x_0)}\, g'(x_0)} = \frac{c}{c} = 1$$

Was ist, wenn $x_0 \to \infty$?

Versuche Substitution: $y = 1/x$, $y_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \left(x \ln(x) \right) \text{ "=" } 0 \cdot \infty = ?$$



L'Hopital:

Umformung: $x \cdot \ln(x) = \frac{\ln(x)}{(1/x)}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\ln x}{x^n} \right) = 0.$$

Integration ist die Umkehroperation der Differenzierung

Gegeben $f(x)$:

Gesucht: "Stammfunktion" $F(x)$, für die gilt:

$$\frac{d}{dx}F(x) = F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in D_f.$$

Stammfunktion ist nur bis auf eine Konstante eindeutig festgelegt.

Denn: $\frac{dF_1}{dx} = f(x)$, $\quad F_2(x) = F_1(x) + c$

⇑ Konstante

dann gilt auch $\frac{dF_2}{dx} = f(x)$, also ist $F_2(x)$ auch eine Stammfunktion.

Menge aller Stammfunktionen einer Fkt. $f(x)$ wird durch ein "unbestimmtes Integral" ausgedrückt:

$$F(x) = \int dx\, f(x) \equiv \int f(x)\, dx$$

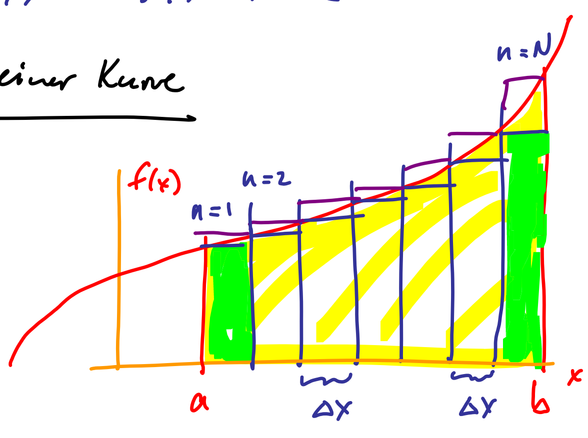
Zwei Stammfunktion derselben Fkt. $f(x)$ unterscheiden sich nur durch eine Konstante: $F_1(x) - F_2(x) = c$

4.1 Stammfunktion als Fläche unter einer Kurve

$f(x)$ sei stetig und monoton steigend für $x \in [a,b]$.

Gesucht: gelbe Fläche: $\equiv F$

$(b-a) = N \cdot \Delta x$



③

"Untersumme": $U = \left[f(a)\cdot\Delta x + f(a+\Delta x)\cdot\Delta x + \dots + f(a+(N-1)\Delta x)\cdot\Delta x \right]$

"Obersumme": $O = \left[f(a+\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+2\Delta x)\cdot\Delta x + \dots + f(\underbrace{a+N\Delta x}_{b})\cdot\Delta x \right]$

Es gilt: $O > F > U$

$$O - U = f(a+N\cdot\Delta x)\cdot\Delta x - f(a)\cdot\Delta x$$

$$= \left[f(b) - f(a)\right]\cdot\Delta x \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0$$

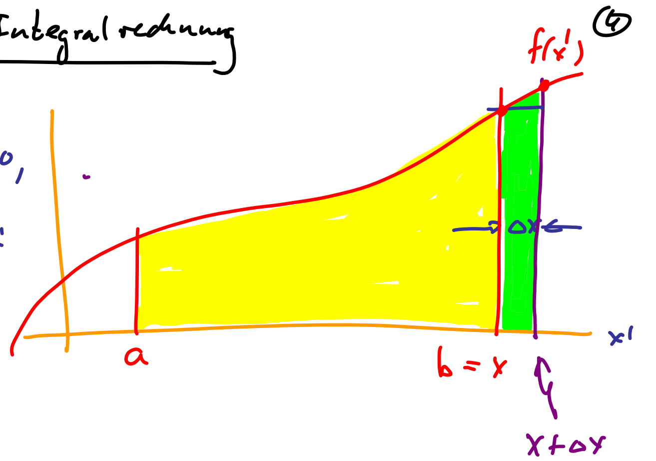
$$\lim_{\Delta x\to 0} U = \lim_{\Delta x \to 0} O = F$$

④

4.2 Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Notation: Fläche zwischen $f(x)$ und 0, mit $x \in [a,b]$, wird notiert durch:

$$\int_a^b dx\, f(x)$$



Die Zuordnung $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(für festes $a<b$): $b \mapsto \int_a^b dx\, f(x) \equiv F(b)$

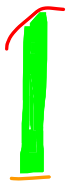
definiert die sogenannte

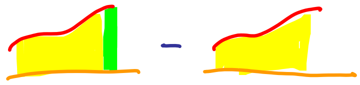
"Flächenfunktion": $F(x) = \int_a^x dx'\, f(x')$

$(x > a)$

Behauptung: die Flächenfunktion ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

⑤

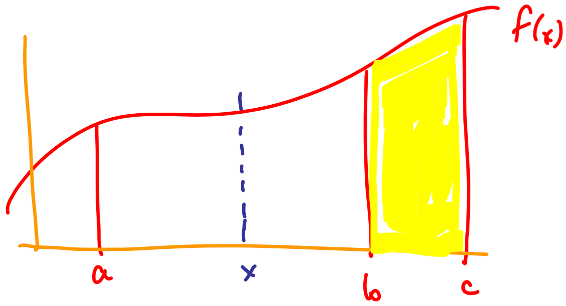
Beweisidee: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[F(x+\Delta x) - F(x) \right]$ =  $\simeq \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(f(x) \cdot \Delta x \right)$



$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \right] \simeq \lim_{\Delta x \to 0} f(x)$$

$F'(x) = f(x) \implies F(x)$ ist eine Stammfkt. von $f(x)$! □

$$F(x) = \int_a^x dx' \, f(x')$$



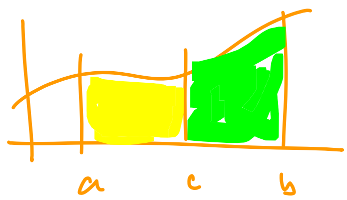
Fläche zwischen $f(x)$ und 0, für $x \in [b,c]$

$$\equiv F(x)\Big|_b^c = F(c) - F(b) = \int_b^c dx' \, f(x')$$

⑥

4.3 Eigenschaften der Integration

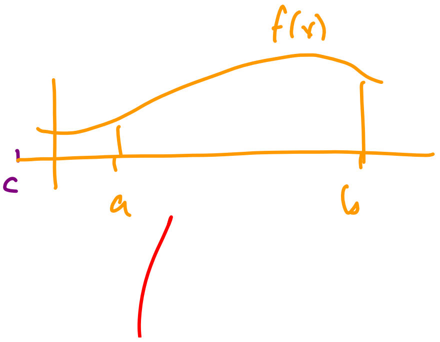
- $\displaystyle\int_a^b dx \, f(x) = \int_a^c dx \, f(x) + \int_c^b dx \, f(x)$

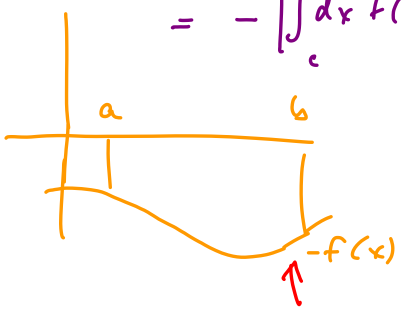


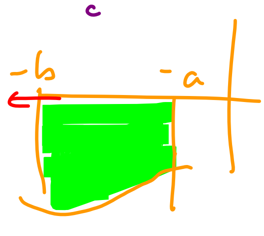
- $\displaystyle\int_a^a dx \, f(x) = 0$

- $\displaystyle\int_a^b dx \, f(x) = -\int_b^a dx \, f(x) = \int_c^b dx \, f(x) - \int_c^a dx \, f(x)$

$$= -\left[\int_c^a dx \, f(x) - \int_c^b dx \, f(x) \right]$$







(7)

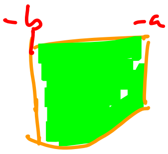
$$\int_a^b dx'\, f(x') = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big)$$

$(a < b)$

$$= -\int_b^a dx'\, f(x') = \int_b^a d(-x')\, f(x')$$

lassen wir das... $y = -x$

$$= -\int_{-b}^{-a} dy\, f(-y') = \; = -$$



$-b < -a$

- $$\frac{d}{dx}\int_a^x dy\, f(y) = f(x)!$$

- $$\int dx\,\big[a\, f(x) + b\, g(x)\big] = a \int dx\, f(x) + b \int dx\, g(x)$$

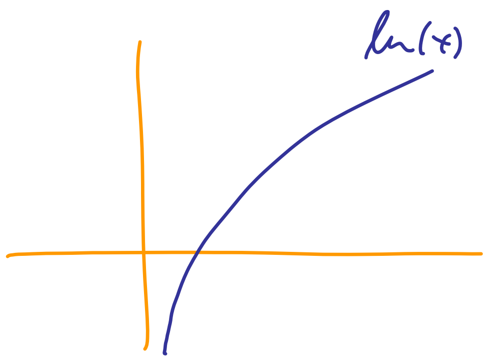
- $$\int dx\, x^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

Warum: Check: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)\cdot x^{\alpha} = x^{\alpha}$ ✓

(8)

- $$\int dx\, \frac{1}{x} = \ln|x| + c$$

weil $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$



- $$\int dx\, e^{x} = e^{x} + c$$

weil $\frac{d}{dx} e^{x} = e^{x}$

- $$\int dx\, \sin x = -\cos x + c$$ weil $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

- $$\int dx\, \cos x = \sin x + c$$ weil $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

4.5 Partielle Integration

9

u, v seien stetig differenzierbar

Produktregel: $$[u(x)\, v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\, v'(x) \quad (1)$$

$\int dx\,(1)$ $$(u\cdot v) = \int dx\, [u\cdot v]' = \int dx\; u'\cdot v + \int dx\; u\cdot v' \quad (2)$$

Umstellen: $$\int dx\; u\cdot v' = u\cdot v - \int dx\; u'\cdot v \quad (3)$$

Mit Integrationsgrenzen: $$\int_a^b dx\; u(x)\cdot v'(x) = \underbrace{u(x)\, v(x)\Big|_{x=a}^{x=b}}_{u(b)v(b) - u(a)v(a)} - \int_a^b dx\; u'(x)\, v(x) \quad (4)$$

10

Bsp. 1:

$$I = \int_0^\pi dx\; \overset{u}{x}\cdot \overset{v'}{\sin x}$$

$u\cdot v - \int u'\cdot v$

$v(x) = -\cos x$ | $u(x) = x$

$v'(x) = \sin x$ | $u'(x) = 1$

$$= x\cdot(-\cos x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi dx\cdot 1\cdot(-\cos x)$$

$$= \underbrace{\pi\cdot(-\cos\pi)}_{\pi} - \underbrace{0\cdot(-\cos 0)}_{=} + \int_0^\pi dx\; \cos x$$

$$= \pi + \underbrace{\sin(x)\Big|_0^\pi}_{\sin\pi - \sin(0) = 0 - 0 = 0.}$$

$$= \pi$$

Bsp. 2: (11)

$$u \quad v' \qquad v' = \cos$$
$$I = \int dx \; x^n \cos x \qquad v = \sin$$
$$u \cdot v - \int u' \cdot v$$

$$\tilde{v}' = \sin \qquad \hat{v} = -\cos$$

$$= x^n \cdot \sin x - \int dx \,\underbrace{(n\; x^{n-1})}_{\tilde{u}} \underbrace{\sin x}_{\tilde{v}'}$$

$$\hat{u} \cdot \hat{v} - \int \hat{u}' \cdot \hat{v}$$

$$= x^n \cdot \sin x - n\left[x^{n-1} \cdot (-\cos x) - \int dx \, (n-1) x^{n-2} \cdot (-\cos x) \right]$$

Bsp 3: (12)

$$I = \int dx \; \overset{v'}{\sin x} \; \overset{u}{e^x} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$v \cdot u - \int u' \cdot v$$

$$v' = \sin x \qquad v = -\cos x$$

$$= e^x \cdot (-\cos x) + \int dx \; \underset{\tilde{u}}{e^x} \cdot \underset{\tilde{v}'}{(+\cos x)}$$

$$\tilde{v}' = \cos x \qquad \hat{v} = \sin x$$

$$\int dx \sin x \, e^x = -\cos x \, e^x + \left[\overset{\hat{u} \cdot \hat{v} \; - \int \hat{u}' \cdot \tilde{v}}{e^x \sin x - \int dx \; e^x \sin x} \right]$$

$$\cancel{2} \int dx \sin x \, e^x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

Check: $\frac{d}{dx} \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cancel{\cos x}) + \frac{1}{2} e^x (+\cancel{\cos x} + \sin x)$ = ✓

$$= e^x \sin x \quad ✓.$$

4.6 Substitution

gegeben seien: $F'(x) = f(x)$, $g(x)$ (1) (13)

$$\left[F(g(x))\right]' \overset{KR}{=} \underbrace{F'(g(x))}_{(1)} \cdot g'(x) = \underbrace{f(g(x))}_{(1)} \cdot g'(x) \qquad (2)$$

$\int dx\,(2)$:

$$\int_a^b dx\, f(g(x)) \cdot g'(x) \overset{(2)}{=} \int_a^b dx \left[F(g(x))\right]' = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

$y = g(x)$

$y_b = g(b)$

$y_a = g(a)$

$$= F(y)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} dy\, f(y)$$

weil $F' \overset{(1)}{=} f$

$$\int_a^b dx\, f(g(x)) \cdot \frac{d}{dx} g(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} dy\, f(y) = \int_{y_a}^{y_b} dy\, f(y)$$

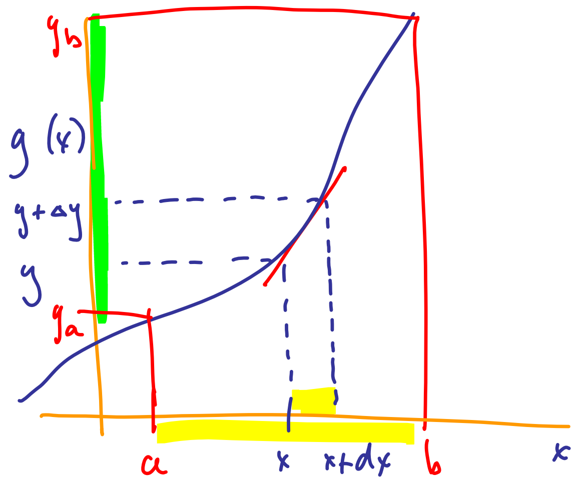
(14)

Merkregel: $g(x) = y$

Integrationsgrenzen: $g(b) = y_b$, $g(a) = y_a$

$$g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} \qquad \text{„} dx\, g'(x) = dy \text{"}$$

$$\int \cancel{dx}\, \overbrace{f(\underbrace{g(x)}_{y})}^{f(y)} \cdot \underbrace{g'(x)\, dx}_{dy} = \int_{y_a}^{y_b} dy\, f(y)$$



Beispiel 4: $I = \int dx \, \frac{1}{(2x+3)^2} = \frac{1}{2}\int dy \, \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{y}$ (15)

Subst: $y(x) = 2x+3$, $y(0) = 3$, $y(1) = 5$

$\frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow$ "$dy = 2\,dx$" $\Rightarrow$ "$dx = \frac{1}{2}\,dy$"

$$\tilde{I} = \int_0^1 dx \, \frac{1}{(2x+3)^2} = \frac{1}{2}\int_{y(0)}^{y(1)} dy \, \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}\int_3^5 dy \, \frac{1}{y^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{y}\Big|_3^5 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right]$$

4.6 Partialbruchzerlegung (16)

allgemeine Form

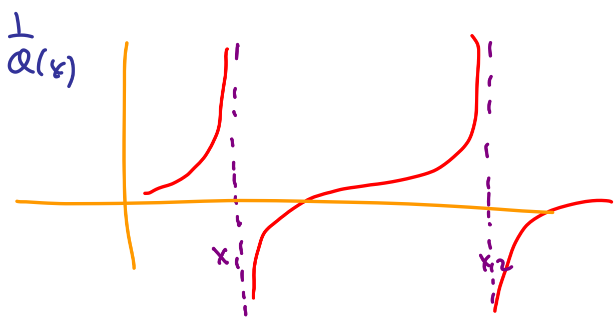
Bsp: $\int dx \, \frac{x+2}{x^2-5x+6} = \int dx \, \frac{R(x)}{Q(x)}$

$R(x)$ ← Polynom 1. Grades

$Q(x)$ ← Polynom 2. Grades.

Idee: $\frac{R(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2}$,

wobei x_1, x_2 die Nullstellen von $Q(x)$ sind.



Bestimmung v. A_1, A_2:

Nullstellen v. $Q(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) \Rightarrow x_1 = 3$, $x_2 = 2$

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2} = \frac{-4}{x-3} + \frac{5}{x-2}$$

einsetzen.

$$\frac{R(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A_1(x-x_2) + A_2(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$R(x) = A_1(x-x_2) + A_2(x-x_1)$$

$$x+2 = A_1(x-2) + A_2(x-3)$$

$$x(\underbrace{1 - A_1 - A_2}_{=0}) = \underbrace{-2 - 2A_1 - 3A_2}_{=6}$$

auflösen nach

$\Rightarrow A_1 = 5$

$A_2 = -4$

$$I = \int dx \left(\frac{5}{x-3} + \frac{-4}{x-2} \right) =$$

$$= 5 \ln|x-3| - 4 \ln|x-2|$$

Falls: $Q(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)(x-x_3)$

Ansatz: $$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{(x-x_1)^2} + \frac{B_2}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3}$$

R: Polynom n-ten Grades

Q: " $n+1$ - Grades.

5. Vektoren

7.10.2013

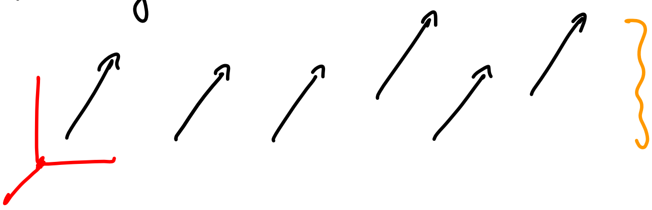
Skalare Größe: ist durch Maßzahl (und Maßeinheit) charakterisiert

z.B. Temperatur, Masse, Zeit, Energie, elektrische Ladung, Druck, ...

Vektorielle Größe: ist durch Maßzahl (Maßeinheit) und eine Richtung charakterisiert

z.B. Geschwindigkeit, Kraft, Impuls, Beschleunigung, Drehmoment, (Ort) ...

Geometrische Def.: Ein Vektor ist die Menge aller gleichgerichteter, gleich langer Pfeile:

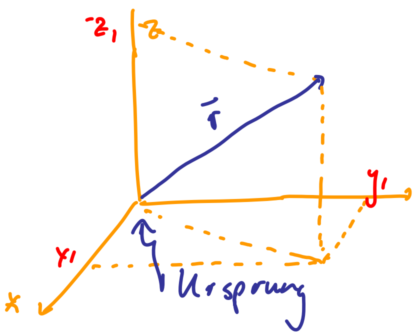


alle diese Pfeile stellen denselben Vektor dar.

Oft wählt man aus dieser Menge einen charakteristischen Repräsentanten: den Pfeil, der bei einem ausgewählten Punkt (i.d. Regel der Nullpunkt = "Ursprung") startet.

②

Beispiel: Ortsvektor:

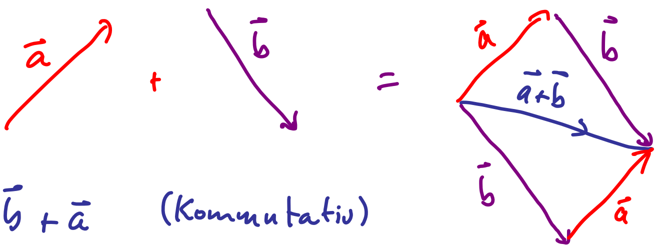


$\vec{r} = (x_1, y_1, z_1)$

$\mathbf{r}$, $\overrightarrow{r}$, $\vec{r}$, $\bar{r}$, $\underline{r}$

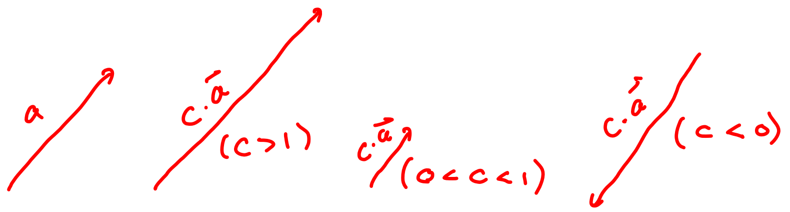
Addition von Vektoren:

(geometrische Def.)



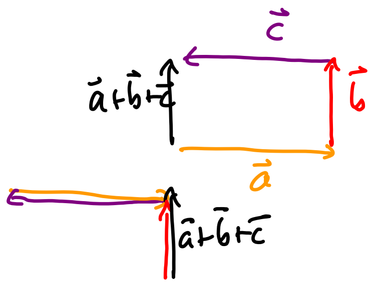
Beobachtung: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativ)

Multiplikation mit Skalar: (Streckung $c>1$, Stauchung $0<c<1$, Richtungsumkehr $c<0$) ③



Vektoraddition ist assoziativ:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$



Formale Definition: ④

Ein Vektorraum ist eine Menge V mit zwei Verknüpfungsregeln:

"+": Vektoraddition:

$$+ : (V, V) \longrightarrow V$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \overrightarrow{(x+y)} = \vec{x} + \vec{y}$$

"$\cdot$": Skalarmultiplikation:

$$\cdot : (\mathbb{R}, V) \longrightarrow V$$

$$(a, \vec{x}) \longmapsto a \cdot \vec{x} \equiv a\vec{x}$$

mit folgenden Eigenschaften (Vektorraum-Axiome)

(1) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V \quad \forall\, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$

(2) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \quad \forall\, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$

(3) $\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 \quad \forall\, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$

(4) Es gibt ein "neutrales Element" $\vec{0}$, mit $\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$ $\forall\, \vec{v}\in V$

(5) $\forall\, \vec{v}\in V$ existiert ein "Inverses", "$-\vec{v}$", so daß $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$

5

Anmerkung: Mit den Eigenschaften (1), (3), (4), (5) heißt V eine "Gruppe" bezüglich Addition.

Mit zusätzlich Eigenschaft (2), heißt V eine "kommutative Gruppe" (Abelsche Gruppe).

Weiterhin:

(6) $\alpha\cdot\vec{v}\in V$ $\quad\forall\, \vec{v}\in V,\ \alpha\in\mathbb{R}$

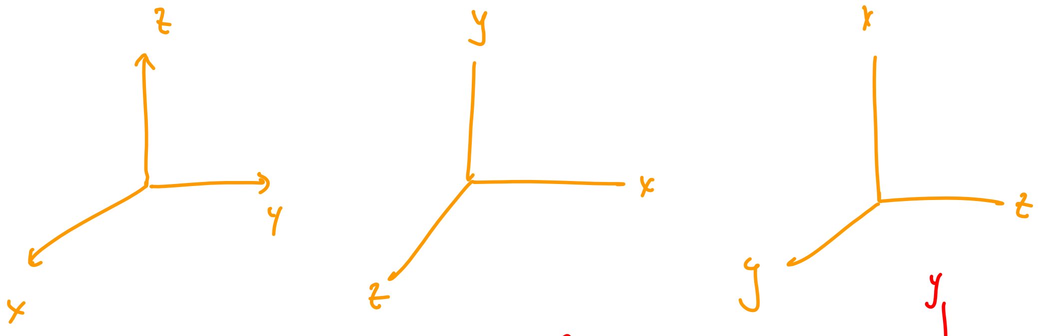
(7) $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{v}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{v}$ $\quad\forall\, \vec{v}\in V,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

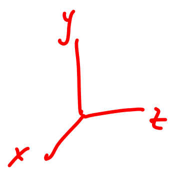
(8) $(\alpha+\beta)\cdot\vec{v} = \alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_1$, $\quad\forall\, \vec{v}\in V,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

(9) $\alpha\cdot(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = \alpha\,\vec{v}_1 + \alpha\,\vec{v}_2$, $\quad\forall\, \vec{v}_1,\vec{v}_2\in V,\ \alpha\in\mathbb{R}$ 6

(10) $1\cdot\vec{v} = \vec{v}$ $\quad\forall\, \vec{v}\in V$.

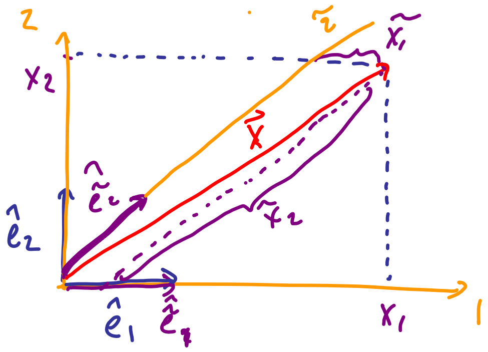
Koordinaten: zur Beschreibung v. Vektoren wählt man in d. Regel ein "Koordinaten-System" aus rechtwinklig zueinander stehenden Koordinatenachsen, die ein "Rechtssystem" bilden:



[Linkssystem: 

]

7

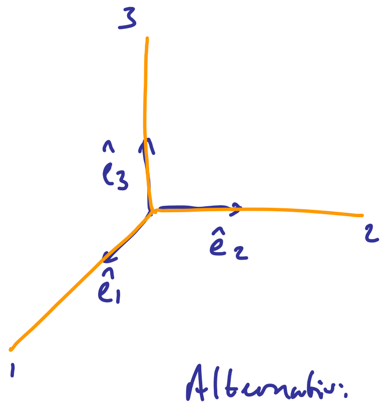


$$= \tilde{x}_1 \hat{\tilde{e}}_1 + \tilde{x}_2 \hat{\tilde{e}}_2$$

$$\vec{x} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_1 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spaltenvektor



Koordinaten/Komponenten

$$\vec{x} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Kurznotation: $\vec{x}$ " = " $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Alternativ: $\hat{e}_1 \longmapsto (1,0)$, $\hat{e}_2 \longmapsto (0,1)$, $\vec{x} \to (x_1, x_2, x_3)$

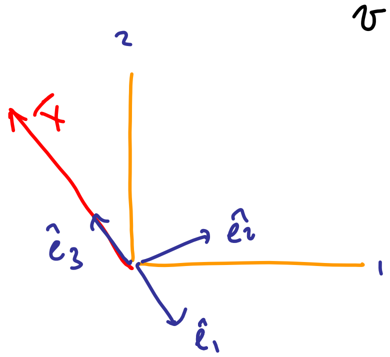
"Reihenvektor"

8

$\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ bildet eine "Basis" für den (2-dim) Vektorraum:

jede $\vec{v} \in V$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$\vec{v} = \underbrace{v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2}_{\text{"Linearkombination"}}$$



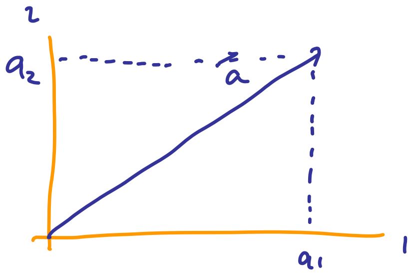
$$\vec{v} = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3$$

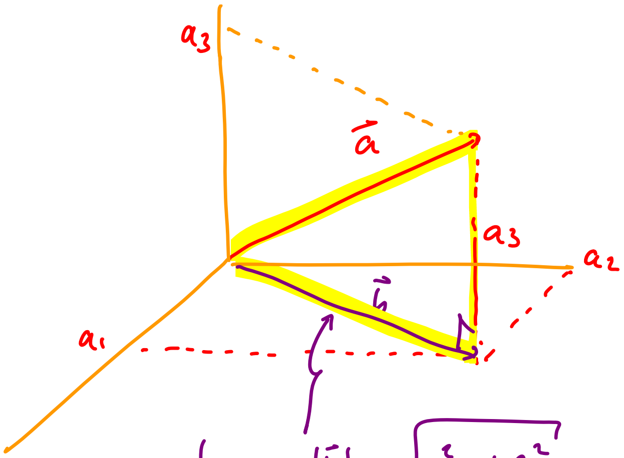
dann sind v_1, v_2, v_3 nicht eindeutig.

"Betrag" (die Länge) eines Vektors ergibt sich laut Pythagoras aus:

2D: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, 3D: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

9





$$b = |\vec{b}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{b^2 + a_3^2}$$

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

<u>Skalarprodukt</u>: $(V, V) \longrightarrow \mathbb{R}$

z.B. in 2D: $V = \mathbb{R}^2$

Definition: $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 \equiv 1$ (1)

$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 \equiv 1$ (2)

$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 \equiv \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \equiv 0$ (3)

Das definiert eine Abbildung:

$$\bullet \; (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 b_1 + a_2 b_2)$$

10

<u>denn:</u>

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2) \cdot (b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1}_{=1} + a_1 b_2 \underbrace{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2}_{=0} + a_2 b_1 \underbrace{\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1}_{=0}$$

(9.1) $\leftarrow$ (9.3) $\rightarrow$

$$+ a_2 b_2 \underbrace{\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2}_{=1}$$

(9.2)

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + b_1 b_1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Rechenregeln für Komponenten: (11)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \quad \vec{a} + \vec{b} = (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2) + (b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2)$$

$$= (a_1 + b_1) \hat{e}_1 + (a_2 + b_2) \hat{e}_2$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Analog: $c\vec{a} = c(a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2) = c a_1 \hat{e}_1 + c a_2 \hat{e}_2$

$$c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c a_1 \\ c a_2 \end{pmatrix}$$

<u>Verallgemeinerung:</u> "Inneres Produkt" auf einem Vektorraum V (12)

ist eine positiv definite Bilinearform $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

$$(v, v) \to \mathbb{R}$$

z.B. für $\mathbb{R}^2$: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

mit folgenden Verknüpfungsregeln:

1. Bilinearität: $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$

2. $\langle \vec{x}, \lambda \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

3. Symmetrie: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$

4. Positiv definit: $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$, $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Beispiel: $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = (a_1 + b_1) \cdot c_1 + (a_2 + b_2) \cdot c_2$

$= (a_1 c_1 + a_2 c_2) + (b_1 c_1 + b_2 c_2)$

$= \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \implies$ Bilinearität (1) ✓

Analog: $\langle \vec{a}, \lambda \vec{c} \rangle = a_1 \cdot (\lambda c_1) + a_2 \cdot (\lambda c_2)$

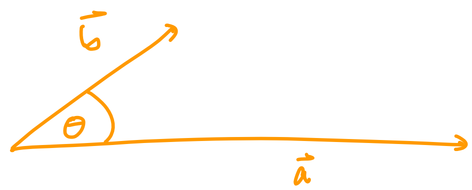
$= \lambda \left[a_1 c_1 + a_2 c_2 \right] = \lambda \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$

$\implies$ Bilinearität (2) ✓.

Geometrische Anschauung: $\vec{a} \neq \vec{b}$:

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

$\theta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$



$a_1 b_1 + a_2 b_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot \cos \theta$

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \implies \cos \theta = 0 \implies \theta = \pi/2$

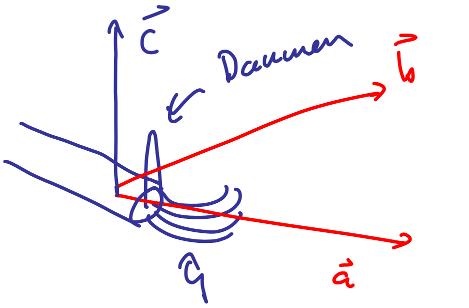
$= 90°$

Speziell in 3 Dimensionen: Vektorprodukt :

$$\text{"}\times\text{"} : (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto \vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$$

mit den Eigenschaften:



anderen Finger greifen von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$

Betrag: $|\vec{c}| \equiv |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\big(\theta(\vec{a},\vec{b})\big)$

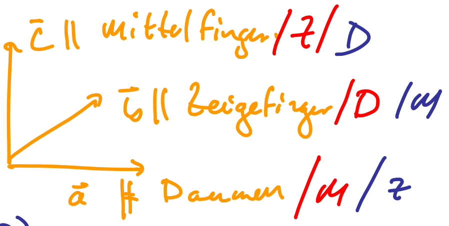
Richtung: $\vec{a}\times\vec{b}$ ist $\perp \vec{a}$ und $\perp \vec{b}$

Orientierung:

rechte-Hand-Regeln:

(D, Z, M)

$(M, D, Z), (Z, M, D)$



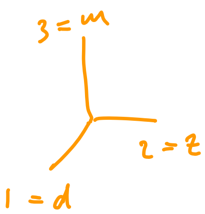
Vektorprodukt in Komponenten ausgedrückt ?

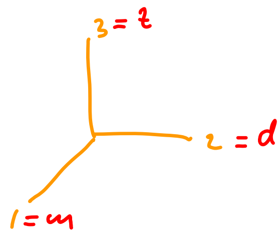
$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \,? \quad , \quad i,j = 1,2,3$$

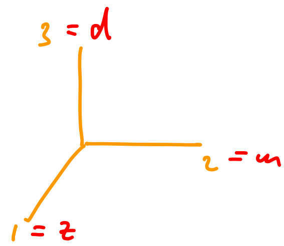
Es gilt immer: $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$, denn $\sin\phi(\vec{a},\vec{a}) = \sin 0 = 0$

$\hat{e}_1\times\hat{e}_1 = \vec{0}$ (1) $\quad \hat{e}_2\times\hat{e}_2 = \vec{0}$ (2) $\quad \hat{e}_3\times\hat{e}_3 = \vec{0}$ (3)

$\hat{e}_1\times\hat{e}_2 = \hat{e}_3$ (4) $\quad \hat{e}_2\times\hat{e}_3 = \hat{e}_1$ (5) $\quad \hat{e}_3\times\hat{e}_1 = \hat{e}_2$ (6)







Es gilt immer: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (7)

$\hat{e}_2\times\hat{e}_1 \overset{(4),(7)}{=} -\hat{e}_3$ (8) $\quad \hat{e}_3\times\hat{e}_2 = -\hat{e}_1$ (9) $\quad \hat{e}_1\times\hat{e}_3 = -\hat{e}_2$ (10)

$$\vec a \times \vec b = (\overset{a}{a_1}\hat e_1 + \overset{b}{a_2}\hat e_2 + \overset{c}{a_3}\hat e_3) \times (\overset{d}{b_1}\hat e_1 + \overset{e}{b_2}\hat e_2 + \overset{f}{b_3}\hat e_3)$$

$$= \hat e_1 (\overset{b.f}{a_2 b_3} \overset{+}{-} \overset{c e}{a_3 b_2})$$

$$+ \hat e_2 (\overset{c.d}{a_3 b_1} \overset{+}{-} \overset{af}{a_1 b_3}) \qquad = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$$+ \hat e_3 (\overset{a.e}{a_1 b_2} - \overset{b.d}{a_2 b_1})$$

Merkregel:

$$\begin{vmatrix} \hat e_1 & \hat e_2 & \hat e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat e_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \hat e_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat e_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat e_1 (a_2b_3 - b_2a_3) - \hat e_2 (a_1b_3 - b_1a_3) + \hat e_3 (a_1b_2 - b_1a_2)$$

Alternativ:

$$\vec a \times \vec b = \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

□.

Komplexe Zahlen 8.10.2013

$x^2 = 2$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar!

Lösung: erweitere $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$

Problem: $x^2 = -1$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar!

Frage: Läßt sich $\mathbb{R}$ so erweitern, dass $x^2 = -1$ lösbar ist?

Postulat: Erweitere $\mathbb{R}$ um eine "imaginäre Einheit",

$i \equiv \sqrt{-1}$, so dass $i^2 = -1$

Um rechnen zu können, benötigt man die üblichen Rechenregeln, insbesondere, alle reellen Zahlen, all reellen Vielfachen von i, und die Kombination daraus, $\underbrace{a+ib}_{\equiv \text{"komplexe Zahl"}}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

---

(2)

Def: Addition: $(a+ib) + (c+id) \equiv (a+c) + (b+d)i$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Def: Multiplikation: $(a+ib)\cdot(c+id) = ac + a(id) + (ib)c + (ib)(id)$

$$= ac + iad + ibc + \underbrace{i^2}_{=-1} bd$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Zuordnung: $a + ib \longmapsto (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$i \longmapsto (0,1) \in \mathbb{R}^2$

Raum aller komplexen Zahlen: $\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$

"Realteil": $\mathrm{Re}(z) = x$, "Imaginärteil": $\mathrm{Im}(z) = y$

Def: $\mathbb{R}^2$ mit folgenden Rechenregeln ist äquivalent zu $\mathbb{C}$: ③

Addition: $(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$

Multiplikation: $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$

Behauptung: mit diesen Rechenregeln enthält $\mathbb{R}^2$ eine Lösung für

$$z^2 = (-1, 0)$$

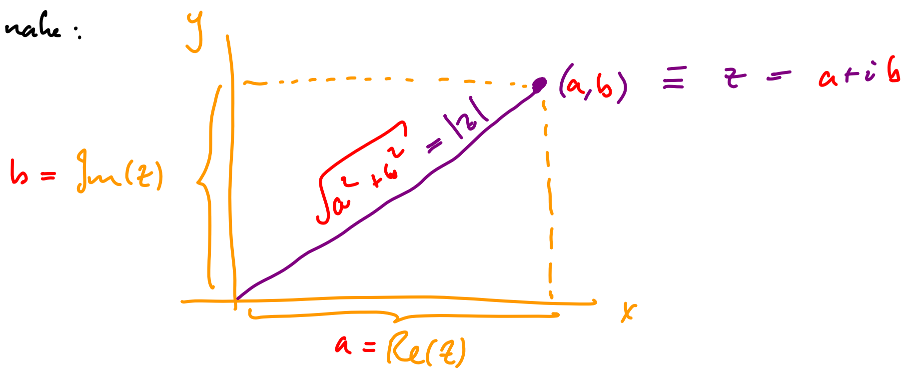
Denn: $z \equiv (0,1)$:

$$z^2 = \overset{a\ b}{(0,1)} \cdot \overset{c\ d}{(0,1)}$$

$$= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)$$

$$= (-1, 0) \text{ entspricht } -1$$

Die Korrespondenz zwischen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ legt eine graphische Darstellung nahe: ④



Inverse Element von $a+ib$? $\quad a \neq 0$ oder $b \neq 0$

Betrachte
$$\frac{1}{a+ib} = \frac{1}{(a+ib)}\frac{(a-ib)}{(a-ib)} = \frac{a-ib}{(aa - b(-b)) + (\underbrace{a(-b) + ba}_{=0})i}$$

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\,i$$

$$\text{Check:}\quad \frac{1}{a+ib}\cdot(a+ib) = \left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right)\cdot(a+ib)$$ ⑤

$$= \frac{1}{(a^2\cancel{+b^2})}\left[\underbrace{\left(a^2-(-b)b\right)}_{a^2\cancel{+b^2}} + i\underbrace{\left(ab+(-b)\cdot a\right)}_{0}\right]$$

$$= 1$$

Def: "Komplex Konjugierte Zahl" zu $z = a+ib$

ist $\bar{z} \equiv z^* \equiv a-ib$

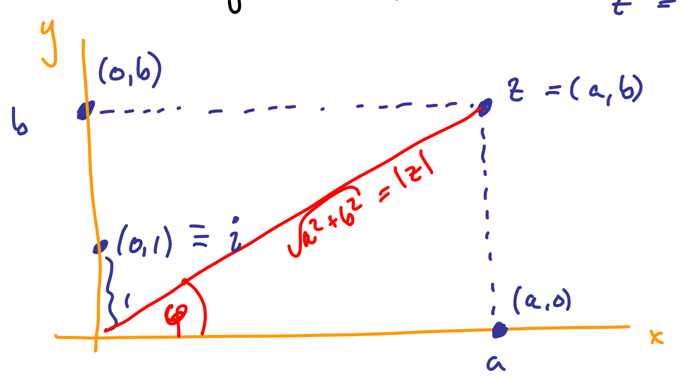
$$z\cdot\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 \geq 0, \quad \in \mathbb{R}$$

Def:

"Betrag von z": $|z| \equiv \sqrt{z\cdot\bar{z}}$

---

generelle geometrische Deutung in "komplexen Ebene" $z = a+ib$ ⑥



$\mathrm{Re}(z) = a = |z|\cos\varphi$

$\mathrm{Im}(z) = b = |z|\sin\varphi$

$\iff$ $z = a+ib$

$= |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi$

"Betrag" "Argument"

$= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$|z| \in [0,\infty[\;\subset \mathbb{R}$

$\varphi \in [0,2\pi[\;\subset \mathbb{R}$

"Polardarstellung" einer komplexen Zahl.

Multiplikation komplexer Zahlen in Polardarstellung

(7)

$$z_1 = a_1 + i b_1 = \overbrace{|z_1|}^{r_1}\,(\overbrace{\cos\varphi_1}^{c_1} + i \overbrace{\sin\varphi_1}^{s_1}) = r_1(c_1 + i s_1)$$

$$z_2 = a_2 + i b_2 = \underbrace{|z_2|}_{r_2}\,(\underbrace{\cos\varphi_2}_{c_2} + i \underbrace{\sin\varphi_2}_{s_2}) = r_2(c_2 + i s_2$$

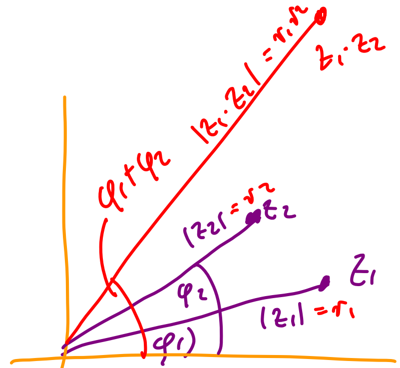
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

$$= r_1(c_1 + i s_1) \cdot r_2(c_2 + i s_2)$$

$$= r_1 \cdot r_2 \left[(c_1 c_2 - s_1 \cdot s_2) + i(c_1 s_2 + s_1 c_2)\right]$$

$$= r_1 r_2 \Big[\underbrace{(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i\underbrace{(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}\Big]$$

$$= (r_1 r_2)\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$$



Einheitskreis:

(8)

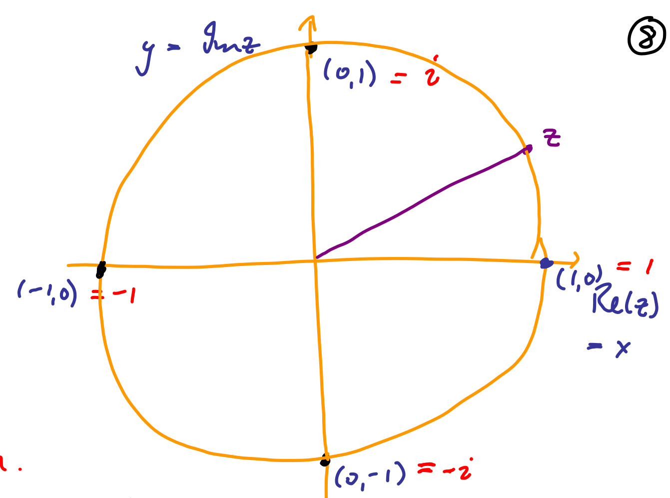
$$z = x + iy$$

$$z = \overset{=1}{|z|}\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$= \cos\varphi + i \sin\varphi$$

$$= e^{i\varphi} \qquad (1)$$

↳ werden wir jetzt zeigen.



Es gelten nämlich folgende Reihenentwicklungen:

$n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

$0! \equiv 1$

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)} w^n = 1 + w + \frac{1}{2!} w^2 + \frac{1}{3!} w^3 + \dots \qquad (2)$$

$$\sin w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1} = w - \frac{1}{3!} w^3 + \frac{1}{5!} w^5 - \dots \qquad (3)$$

$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} w^2 + \frac{1}{4!} w^4 - \dots \qquad (4)$$

(Taylor-Reihen)

Konsistenzcheck: Wir wissen: $\frac{d}{dw} e^w = e^w$. (9)

Gilt das für (8.2)?

$$\frac{d}{dw} e^w \overset{(8.2)}{=} \frac{d}{dw} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{d}{dw} \frac{1}{n!} w^n}_{\frac{1}{\cancel{n}(n-1)!} \cancel{n} w^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} w^{n-1}$$

$n-1=m$ $$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} w^m \overset{(8.2)}{=} e^w$$

$$n! = n(n-1)!$$

$$n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = n(n-1)\cdot(n-2)(n-3)\cdot\ldots 1$$

Analog: wir wissen: $\frac{d}{dw} \sin w = \cos w$; gilt das für (8.3)? (8.4)?

$$\frac{d}{dw} \sin w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \underbrace{\frac{d}{dw} w^{2n+1}}_{(2n+1) w^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{2n} = \cos w$$

Analog: $\frac{d}{dw} \cos w = -\sin w$

Def von $n!$ $$n! = \begin{cases} 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n & \forall\, n \neq 0,\ n \in \mathbb{N} \\ 1 & \forall\, n = 0 \end{cases}$$ (10)

Betrachte nun (8.2) mit Argument iw:

$$e^{iw} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)} (iw)^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (i)^{2n} w^{2n}}_{\text{geraden Potenzen v. } w} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (i)^{2n+1} w^{2n+1}}_{\text{ungeraden Potenzen}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n w^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-1)^n w^{2n+1}$$

$$\overset{(8.4)}{=} \cos w + i \sin w = e^{iw}$$

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i \cdot i^2 = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

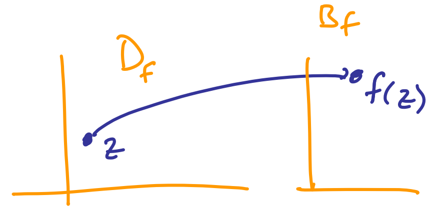
$i^5 = i \cdot i^4 = i$

$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$

$i^{2n+1} = i \cdot i^{2n} = i(-1)^n$

Wie zeichnet man eine komplexe Funktion: ⑪

Was ist überhaupt eine komplexe Funktion?



$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

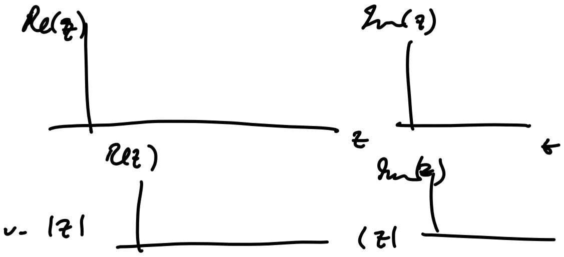
z.B.: $$z \longrightarrow f(z) = e^z$$

Es ist nicht möglich, in einem "2D"-Plot alle Info. über $z \to f(z)$ zu skizzieren:

Übliche Darstellungen: $\forall\, z$ reell:

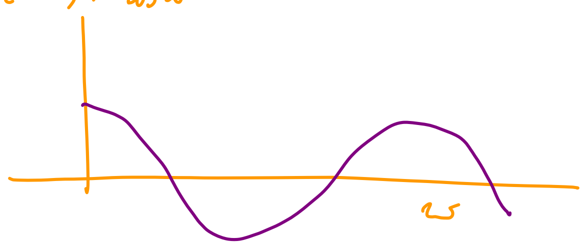
oder $\forall\, z$ Im.

oder: festes φ, als Fkt. v. $|z|$

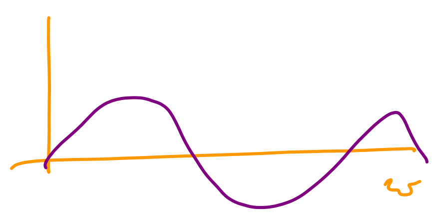


Skizziere $e^{i\omega}$ $\forall$ $\omega \in \mathbb{R}$: $z = x + iy$ $\quad \mathrm{Im}(z) = y$ ⑫

$\mathrm{Re}(e^{i\omega}) = \cos\omega$



$\mathrm{Im}(e^{i\omega}) = \sin\omega$



$$e^{i\omega} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$\omega \to e^{i\omega}$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$e^{x+iy} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$

$$e^{i(x+iy)} = \cos(x+iy) + i \sin(x+iy)$$

$$= \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) \qquad (1)$$

$$+ i\left[\sin x \cos iy + \cos x \sin iy\right] \qquad (2)$$

$$= \cos x \overset{a}{\cosh y} - \sin x \, \overset{b}{i \sinh y} \qquad (3)$$

$$+ i\left(\sin x \overset{c}{\cosh y} + \cos x \, \overset{d}{i \sinh y}\right) \qquad (4)$$

$$= \cos x\left(\overset{a}{\cosh y} - \overset{d}{\sinh y}\right) \qquad (5)$$

$$+ i \sin x \left(\overset{c}{\cosh y} - \overset{b}{\sinh y}\right) \qquad e^{i(x+iy)} \qquad (6)$$

$$= (\cos x + i \sin x)(\cosh y - \sinh y) = e^{ix} \cdot e^{-y} \qquad (7)$$

---

(4)

$$e^{iw} = \cos w + i \sin w \qquad (1)$$

$$e^{-iw} = \cos(-w) + i \sin(-w) \qquad (2)$$

$$e^{-iw} = \cos w - i \sin w \qquad (3)$$

$$\frac{(1)+(3)}{2}: \quad \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = \cos w \qquad (4) \qquad \frac{1}{i} = -i$$

$$1 = i \cdot \frac{1}{i} = i \cdot (-i) = 1$$

$$\frac{(1)-(3)}{2i}: \quad \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \sin w \qquad (5)$$

$$(4): w = iv: \quad \cos(iv) = \left(e^{i(iv)} + e^{-i(iv)}\right)/2 = \frac{e^{-v} + e^{v}}{2} \equiv \cosh v$$

$$(5): w = iv: \quad \sin(iv) = \frac{e^{-v} - e^{+v}}{2i} = i\,\frac{1}{2}\left(e^{v} - e^{-v}\right) = i \sinh v$$

$$\sin(iv) = \frac{e^{i(iv)} - e^{-i(iv)}}{i2}$$

$i^2 = -1$

$-i \cdot i = +1$

$$= \frac{e^{-v} - e^{v}}{i2} = \frac{1}{i}\ \frac{1}{2}\left(e^{-v} - e^{v}\right)$$

$$= -i\ \frac{1}{2}\left(e^{-v} - e^{v}\right)$$

$$= i\frac{1}{2}\underbrace{\left(e^{v} - e^{-v}\right)}_{\equiv}$$ def.

$$= i\ \sinh(v)$$

$$e^x = \cosh x + \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) + \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

$-$

Euler-Formel für $w = \pi$:

$$e^{iw} = \cos w + i \sin w$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i \sin\pi$$

$$= -1 + i \cdot 0$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

$i y_1 = y_1 i$

$z = x + iy$

$z_1 \cdot z_2$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= x_1 \cdot x_2 + \underbrace{(iy_1)(iy_2)}_{i^2 y_1 y_2} + iy_1 x_2 + x_1 i y_2$$

Multiplikation komplexer Zahlen in Polardarstellung

$$z_1 = a_1 + ib_1 = \overbrace{|z_1|}^{r_1}\big(\overbrace{\cos\varphi_1}^{c_1} + i\,\overbrace{\sin\varphi_1}^{s_1}\big) = r_1(c_1 + i s_1)$$

$$z_2 = a_2 + ib_2 = \underbrace{|z_2|}_{r_2}\big(\underbrace{\cos\varphi_2}_{c_2} + i\,\underbrace{\sin\varphi_2}_{s_2}\big) = r_2(c_2 + i s_2)$$

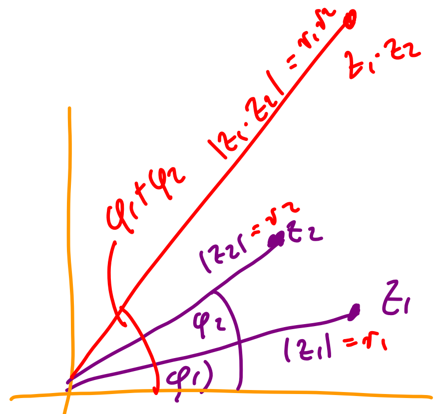
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

$$= r_1(c_1 + is_1)\cdot r_2(c_2 + is_2)$$

$$= r_1\cdot r_2\big[(c_1c_2 - s_1\cdot s_2) + i(c_1 s_2 + s_1 c_2)\big]$$

$$= r_1 r_2\big[(\underbrace{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)}) + i(\underbrace{\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)})\big]$$

$$= (r_1 r_2)\big[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big]$$



Einheitskreis:

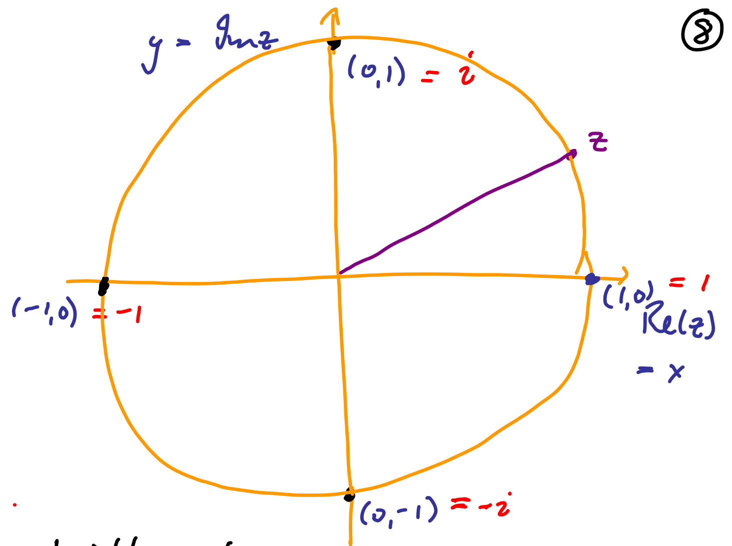
$z = x + iy$

$$z = \overset{1}{|z|}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$= e^{i\varphi} \qquad (1)$$

↑ werden wir jetzt zeigen.



Es gelten nämlich folgende Reihenentwicklungen:

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)} w^n = 1 + w + \frac{1}{2!}w^2 + \frac{1}{3!}w^3 + \dots \qquad (2)$$

$n! \equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$

$0! \equiv 1$

$$\sin w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1} = w - \frac{1}{3!}w^3 + \frac{1}{5!}w^5 - \dots \qquad (3)$$

$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}w^2 + \frac{1}{4!}w^4 - \dots \qquad (4)$$

(Taylor-Reihen)

Konsistenzcheck: Wir wissen: $\frac{d}{dw} e^{w} = e^{w}$. (9)

Gilt das für (8.2)?

$$\frac{d}{dw} e^{w} \overset{(8.2)}{=} \frac{d}{dw} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{d}{dw} \frac{1}{n!} w^{n}}_{\frac{1}{\cancel{n}(n-1)!}\cancel{n} w^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} w^{n-1}$$

$$n-1=m \quad = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} w^{m} \overset{(8.2)}{=} e^{w}$$

$$n! = n(n-1)!$$

$$n(n-1)(n-2)\ldots.1 = n(n-1)\cdot(n-2)(n-3)\ldots 1$$

Analog: wir wissen: $\frac{d}{dw} \sin w = \cos w$; gilt das für (8.3)? (8.4)?

$$\frac{d}{dw} \sin w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!} \underbrace{\frac{d}{dw} w^{2n+1}}_{(2n+1) w^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!} w^{2n} = \cos w$$

Analog: $\frac{d}{dw} \cos w = - \sin w$

Def von $n!$ $\quad n! = \begin{cases} 1\cdot 2\cdot 3 \ldots . n & \forall\, n \neq 0,\ n \in \mathbb{N} \\ 1 & \forall\, n = 0 \end{cases}$ (10)

Betrachte nun (8.2) mit Argument iw:

$$e^{iw} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)} (iw)^{n}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (i)^{2n} w^{2n}}_{\text{geraden Potenzen v. } w} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (i)^{2n+1} w^{2n+1}}_{\text{ungeraden Potenzen}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^{n} w^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-1)^{n} w^{2n+1}$$

$$\overset{(8.4)}{=} \cos w + i \sin w = e^{iw}$$

$i^{0} = 1$

$i^{1} = i$

$i^{2} = -1$

$i^{3} = i \cdot i^{2} = -i$

$i^{4} = (i^{2})^{2} = (-1)^{2} = 1$

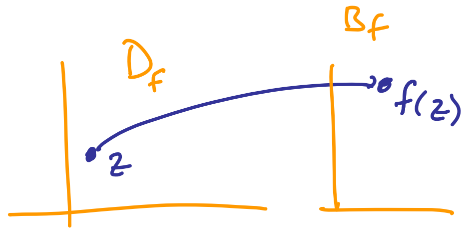
$i^{5} = i \cdot i^{4} = i$

$i^{2n} = (i^{2})^{n} = (-1)^{n}$

$i^{2n+1} = i \cdot i^{2n} = i(-1)^{n}$

Wie zeichnet man eine komplexe Funktion: (11)

Was ist überhaupt eine komplexe Funktion?



$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

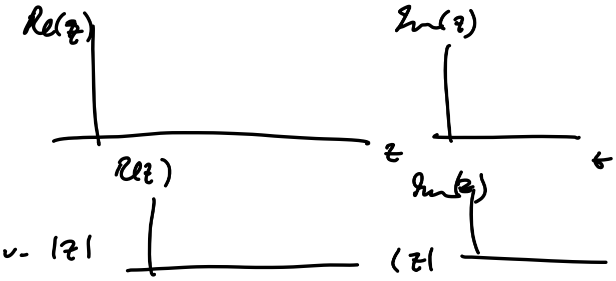
z.B.: $$z \longrightarrow f(z) = e^z$$

Es ist nicht möglich, in einem "2D"-Plot alle Info. über $z \to f(z)$ zu skizzieren:

Übliche Darstellungen: $\forall\, z$ reell:

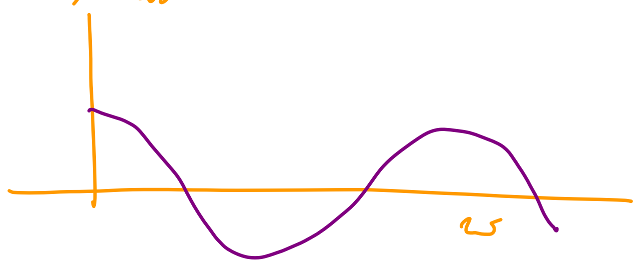
oder $\forall\, z$ Im.

oder: festes φ, als Fkt. v. $|z|$

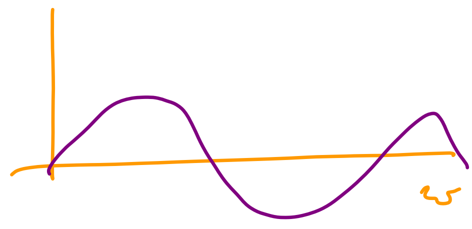


Skizziere e^{iw} $\forall\, w \in \mathbb{R}$: $z = x+iy$ $\quad \mathrm{Im}(z) = y$ (12)

$\mathrm{Re}(e^{iw}) = \cos w$



$\mathrm{Im}(e^{iw}) = \sin w$



$$e^{iw} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$w \to e^{iw}$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$e^{x+iy} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$

$$e^{i(x+iy)} = \cos(x+iy) + i \sin(x+iy)$$

$$= \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) \qquad (1)$$

$$+ i\left[\sin x \cos iy + \cos x \sin iy\right] \qquad (2)$$

$$= \cos x \overset{a}{\cosh y} - \sin x \, \overset{b}{i \sinh y} \qquad (3)$$

$$+ i\left(\sin x \overset{c}{\cosh y} + \cos x \, \overset{d}{i \sinh y}\right) \qquad (4)$$

$$= \cos x\left(\overset{a}{\cosh y} - \overset{d}{\sinh y}\right) \qquad (5)$$

$$+ i \sin x \left(\overset{c}{\cosh y} - \overset{b}{\sinh y}\right) \qquad e^{i(x+iy)} \qquad (6)$$

$$= (\cos x + i \sin x)(\cosh y - \sinh y) = e^{ix} \cdot e^{-y} \qquad (7)$$

(4)

$$e^{iw} = \cos w + i \sin w \qquad (1)$$

$$e^{-iw} = \cos(-w) + i \sin(-w) \qquad (2)$$

$$e^{-iw} = \cos w - i \sin w \qquad (3)$$

$$\frac{(1)+(3)}{2}: \quad \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = \cos w \qquad (4) \qquad \frac{1}{i} = -i$$

$$1 = i \cdot \frac{1}{i} = i \cdot (-i) = 1$$

$$\frac{(1)-(3)}{2i}: \quad \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \sin w \qquad (5)$$

$$(4): w = iv: \quad \cos(iv) = \left(e^{i(iv)} + e^{-i(iv)}\right)/2 = \frac{e^{-v} + e^{v}}{2} = \cosh v$$

$$(5): w = iv: \quad \sin(iv) = \frac{e^{-v} - e^{+v}}{2i} = i \tfrac{1}{2}\left(e^{v} - e^{-v}\right) = i \sinh v$$

$$\sin(iv) = \frac{e^{i(iv)} - e^{-i(iv)}}{i2}$$

$i^2 = -1$

$-i \cdot i = +1$

$$= \frac{e^{-v} - e^{v}}{i2} = \frac{1}{i} \frac{1}{2}(e^{-v} - e^{v})$$

$$= -i \frac{1}{2}(e^{-v} - e^{v})$$

$$= i \underbrace{\frac{1}{2}(e^{v} - e^{-v})}_{\equiv}$$ def.

$$= i \sinh(v)$$

$$e^{x} = \cosh x + \sinh x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

$-$

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

Euler-Formel für $w = \pi$:

$$e^{iw} = \cos w + i \sin w$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i \sin\pi$$

$$= -1 + i\,0$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

$iy_1 = y_1 i$

$z = x + iy$

$z_1 \cdot z_2$

$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

$$= x_1 \cdot x_2 + \underbrace{(iy_1)(iy_2)}_{i^2 y_1 y_2} + iy_1 x_2 + x_1 i y_2$$

Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

$$z_1: \quad \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 = 1$$
$$z_2: \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = ?,\quad x_2 = ?,\quad x_3 = ?$$
$$z_3: \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$

Gauß-Verfahren:

$$z_1': \quad 3z_1: \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$z_2': \quad z_2 - 3z_1: \quad \underline{\underline{0}} + x_2 + 2x_3 = -1$$
$$z_3': \quad z_3 - 6z_1: \quad \underline{\underline{0}} + x_2 - x_3 = -5$$

$$z_1'': \quad z_1' - z_2': \quad x_1 + 0 - x_3 = 4$$
$$z_2'': \quad z_2' + 2z_3': \quad \underline{\underline{0}} + 3x_2 + \underline{\underline{0}} = -11$$
$$z_3'': \quad z_2' - z_3': \quad 0 + 0 + 3x_3 = 4$$

$$z_1'' + z_3''/3: \quad x_1 + 0 + 0 = 16/3$$
$$z_2''/3: \quad 0 + x_2 + 0 = -11/3$$
$$z_3''/3: \quad 0 + 0 + x_3 = 4/3$$

Kurznotation: Erweiterte Matrix:

$$\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 = a_1,\quad x_2 = a_2,\quad x_3 = a_3$$
$$\Uparrow$$

$$\begin{array}{c} z_1: \\ z_2: \\ z_3: \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)
\Longrightarrow
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \end{array}\right)$$

$z_1' = 3z_1$: $\quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad | \quad 3$

$z_2' = z_2 - 3z_1$: $\quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad | \quad -1$

$z_3' = z_3 - 6z_1$: $\quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad | \quad -5$

$z_1'' = z_1' - z_2'$: $\quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad | \quad 4$

$z_2'' = z_2' + 2z_3'$: $\quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad | \quad -11$

$z_3'' = z_2' - z_3'$: $\quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad | \quad 4$

$z_1''' = z_1'' + z_3''/3$: $\quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 16/3$

$z_2''' = z_2''/3$: $\quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad -11/3$

$z_3''' = z_3''/3$: $\quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad 4/3$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = 16/3, \quad x_2 = -11/3, \quad x_3 = 4/3$$

Matrizen:

Eine Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{cc} & n \text{ Spalten} \\ m \text{ Zeilen} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & A_{ij} & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \end{array} = (A_{ij})$$

A_{ij}, $\quad i = 1, \dots, m$

$\qquad j = 1, \dots, n$

Quadratische Matrix: $n = m$.

Eine (von unendlich vielen) Anwendung: lineare Gleichungssysteme:

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

in "Matrix notation": $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$

"Multiplikation eines Spaltenvektors mit einer Matrix"

$$
\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

Multiplikation Matrix-Vektor $\longrightarrow$ Vektor:

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \vdots \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

$$
b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j
$$

$[(m \times n)\text{-Matrix}] \cdot [\text{Spaltenvektor mit } n \text{ Einträgen}]$

$= [\text{Spaltenvektor mit } m \text{ Einträgen}]$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b} \qquad (1)$$

⑦

Matrix-Multiplikation : Matrix , Matrix $\rightarrow$ Matrix.

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot (1): \qquad \underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}}_{\mathbb{1}} \cdot \vec{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{1}}} \cdot \vec{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \vec{b}$$

Matrix-Multiplikation:

⑧

Voraussetzung: $\underset{n\times m}{\underline{\underline{B}}} \cdot \underset{m\times l}{\underline{\underline{A}}} = \underset{n\times l}{\underline{\underline{C}}}$

$$\begin{array}{r}
\\ \\ \text{Reihe } \underline{\underline{i}} \rightarrow \\ \\ \\
\end{array}
\begin{pmatrix}
B_{11} & \cdots & B_{1j} & \cdots & B_{1m} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
B_{i1} & \cdots & B_{ij} & \cdots & B_{im} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
B_{n1} & \cdots & B_{nj} & \cdots & B_{nm}
\end{pmatrix}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & & \text{Spalte } \underline{\underline{k}} & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
A_{11} & \cdots & A_{1k} & \cdots & A_{1l} \\
\vdots & & & & \\
A_{j1} & \cdots & A_{jk} & \cdots & A_{jl} \\
\vdots & & & & \\
A_{m1} & \cdots & A_{mk} & \cdots & A_{ml}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow \text{Reihe } j \\ \\ \\
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & & \text{Spalte } k & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
C_{11} & \cdots & C_{1k} & \cdots & C_{1l} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
C_{i1} & \cdots & \boxed{C_{ik}} & \cdots & C_{il} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
C_{n1} & \cdots & C_{nk} & \cdots & C_{nl}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Spalte j

Reihe $\underline{\underline{i}}$

$$C_{ik} = B_{i1} A_{1k} + B_{i2} A_{2k} + \ldots B_{ij} A_{jk} + \ldots + B_{im} A_{mk}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} B_{ij} A_{jk}$$

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{array}{c|cc} \underline{\underline{B}} \backslash \underline{\underline{A}} & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 2 \\ 4\cdot 0 + 5\cdot 2 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{matrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C$$

$$\mathbb{1} = \text{Einheitsmatrix} :\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = n \times n\text{-Matrix}$$

$$\mathbb{1}_{ij} = \begin{cases} 1 & \forall\, i = j \\ 0 & \forall\, i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 0 + 0 \\ 0 + y + 0 \\ 0 + 0 + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{1}}} = \underline{\underline{A}} \quad , \quad \mathbb{1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$$

I. Allgemein: $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ (nicht-kommutativ)

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Matrix – Diagonalisieren:

$$\underline{\underline{U}}\ \underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

gesucht: $\underline{\underline{U}}$ gegeben: $\underline{\underline{A}}$ diagonal: $\underline{\underline{D}}$

Beispiel: Partialbruchzerlegung:

$$\frac{\tilde{B}x + \tilde{C}}{(x - x_2)^2}$$

$$I = \int dx \frac{4x - 1}{(x+2)(x-1)^2} = \int \frac{R(x)}{Q(x)} = \int dx \left[\frac{A}{x - x_1} + \underbrace{\frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{(x - x_2)^2}}\right]$$

Nullstellen v. Q: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ (doppelt)

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)}{(x+2)(x-1)^2}$$

$$4x - 1 = A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)$$

$0 \cdot x^2$

$$x^2 \underbrace{(A + B)}_{=0} \Rightarrow A = -B$$

$$= A\left[\cancel{x^2} - 2x + 1 - (\cancel{x^2} + x - 2)\right] + C(x+2)$$

$$= x\,(\underbrace{-2A \quad -A \quad +C}) + (\underbrace{A+2A+2C})$$

$$4 = -2A - A + C \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

$$-1 = A + 2A + 2C \quad \Rightarrow \quad A = -1 \quad \Rightarrow \quad B = +1$$

$$I = \int dx \left[\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right]$$

$$= -\ln|x+2| + \ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + \text{Const.}$$

Check: $\dfrac{-(x-1)^2 + (x+2)(x-1) + x+2}{(x+2)(x-1)^2} = \dfrac{-\cancel{x^2}+2x-1+\cancel{x^2}+x-2+x+2}{} \quad \dfrac{4x-1}{(\ )(\ )^2}$ ✓

Substitution

$$I := \int dx\; f(g(x))\, g'(x)$$

$$I = \int \underbrace{dx \overset{g'}{\cos x}}_{dg'} \underbrace{(\overset{g}{\sin x} + b)^c}_{f(g(x))} = \int dy\, (y+b)^c$$

$$= \frac{1}{c+1}(y+b)^{c+1} = \frac{1}{c+1}(\sin x + b)^{c+1}$$

$$y = \sin(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \quad \Rightarrow \quad dy \text{ "=" } dx \cos x$$

Check: $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{c+1}(\sin x + b)^{c+1} = \dfrac{\cancel{c+1}}{\cancel{c+1}}(\sin x + b)^c \cdot \cos x$ ✓

$$I' = \int_0^{\pi/2} dx \cos x\,(\sin x + b)^c = \int_{y=\sin(x=0)=0}^{y=\sin(x=\pi/2)=1} dy\,(y+b)^c = \frac{1}{c+1}(y+b)^{c+1}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{c+1}\left[(1+b)^c - b^{c+1}\right]$$

Alternativ: $I' = \frac{1}{c+1}(\sin x + b)^{c+1} \Big|_0^{\pi/2}$

$$= \frac{1}{c+1}\left[(1+b)^{c+1} - b^{c+1}\right]$$