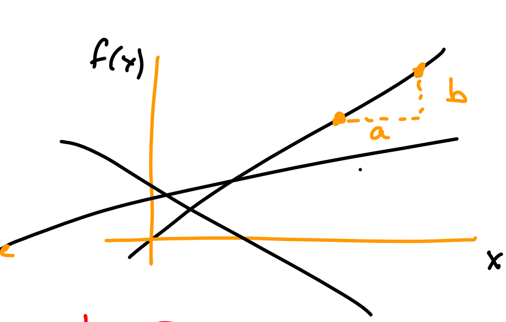
1.4.1 Lineare Funktionen

①



Def.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Schnittpunkt mit y-Achse

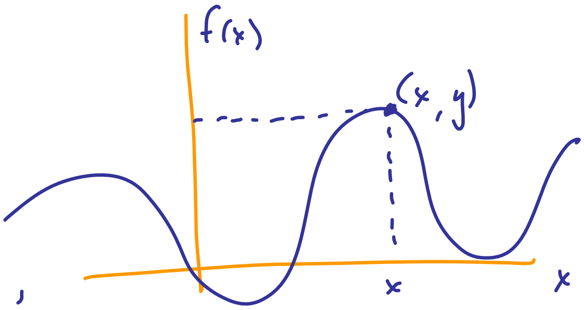
$x \mapsto f(x) = mx + t \quad , m, t \in \mathbb{R}$

"lineare Funktion"   Steigung $= b/a$

ist eindeutig bestimmt durch Angabe von 2 Punkten auf der Kurve.

Allgemein: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = y$



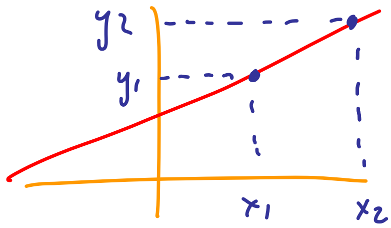
Graph v. f: $\mathcal{G}_f = \{(x,y) : x \in D_f,\ y = f(x) \in B_f\}$

②

Zurück zu lin. Funktionen:

Seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei Punkte auf $\mathcal{G}_f$:

Dann: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $t = ?$



$$f(x) = (x - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + y_1$$

Check: $f(x_1) = (x_1 - x_1)\left(\frac{\cdots}{\cdots}\right) + y_1 = y_1$ ✓

1.4.2 Polynom-Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \quad , \quad a_j \in \mathbb{R} \, , \, n \in \mathbb{N}_0$$

"Polynom n-ten Grades": $a_n \neq 0$ — Beisp:

$n = 1$: "lineare Funktion" — $x \mapsto 2x + 1$

$n = 2$: "Parabel" — $3x^2 + 2x - 1$

$n = 3$: "kubisches Polynom" — $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$n = 4$: "quartisches Polynom" — $4x^4 + \dots$

Nullstellen v. Polynomen

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0, \ a_j \in \mathbb{R}$$

Gesucht: "Nullstellen v. $P(x)$", d.h. die x-Werte, für die $P(x) = 0$.

Satz: Eine Polynomfunktion von Grad n hat genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ und höchstens n Nullstellen in $\mathbb{R}$. (1)

Ein Polynom n-ten Grades mit der Nullstelle x_1 kann in die Form

$$P(x) = (x - x_1)\,\tilde{P}(x)$$

geschrieben werden, wobei $\tilde{P}(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades ist.

(5)

Beispiel 1: Sei $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}(x - \frac{4}{3}) \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}$

Bsp 2: $g(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3) \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{matrix}$

Bsp: $h(x) = x^3 + 5x^2 - 22x - 56$, Tipp: $\underline{x_1 = 4}$ ist eine Nullstelle.

Bestimme $\hat{P}(x)$, so dass $h(x) = (x-4)\,\hat{P}(x)$

$$x^3 + 5x^2 - 22x - 56 = (x-4)(1 \cdot x^2 + 9x + 14)$$

$?\quad ?\quad ?$

$9x^2$ $\quad -36x \quad x^3 \quad -4x^2 \quad 14x \quad -56$

(6)

Nochmal, mit "Polynomdivision": $\tilde{P}(x) = \frac{P(x)}{x-4}$

$$(x^3 + 5x^2 - 22x - 56) : (x-4) = x^2 + 9x + 14$$

$$\begin{array}{l} -(x^3 - 4x^2) \\ \hline \quad +9x^2 - 22x \\ \quad -(9x^2 - 36x) \\ \hline \qquad 14x - 56 \\ \qquad -(14x - 56) \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow P(x) = (x-4)(\underbrace{x^2 + 9x + 14}_{\text{Nullstellen?}})$$

Nullstellen? Inspektion $= (x+2)(x+7)$

Nullstellen einer quadratischen Funktion: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (7)

"Mitternachts-Formel": Nullstellen $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

"Quadratische Ergänzung:" $ax^2 + bx + c = 0$

$$a\Big(x + \overset{?}{\frac{b}{2a}}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} = -c$$

Nebenrechnung:

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$$a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 = \cancel{a}\Big(x^2 + \underbrace{\cancel{2} \cdot \frac{b}{\cancel{2}\cancel{a}} \cdot x}_{bx}\Big) + \underbrace{a \cdot \frac{b^2}{4a^2}}_{b^2/4a}$$

$$\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 = \frac{-c4a + b^2}{4a \cdot a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Angewendet auf $\tilde{P}(x) = x^2 + 9x + 14$ (8)

$b = 9, \quad c = 14$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \left\{\begin{matrix} -2 \\ -7 \end{matrix}\right.$$

$$\tilde{P}(x) = (x - x_1)(x - x_2) = (x+2)(x+7)$$

Satz 4.1 bedeutet: Jedes Polynom n-ten Grades kann geschrieben werden als:

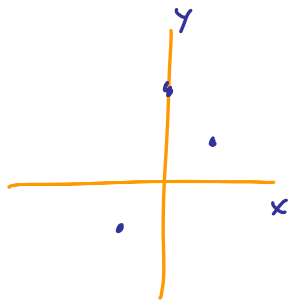
$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

wobei $x_j, \ (j = 1, \dots, n)$ die Nullstellen sind, $x_j \in \mathbb{C}$.

Ein Polynom n-ten Grades ist eindeutig festgelegt durch Angabe von n+1 „Daten“:

z.B.: $a_0, a_1, \dots, a_n$

Oder: n+1 Punkte auf dem Graph: $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_{n+1}, y_{n+1})$



Bsp.: Sei $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

mit 3 Punkten auf G_f: $(0,2), (-1,1), (1,1)$

Strategie: setze Punkte auf G_f ein $\Rightarrow$ 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten a_2, a_1, a_0.

$(0,2)$: $2 = f(0) = a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0 \Rightarrow a_0 = 2$

$(-1,-1)$: $-1 = f(-1) = a_2(-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0$

$= a_2 - a_1 + 2$

$\Rightarrow a_2 - a_1 = -3$ (1)

$(1,1)$: $1 = f(1) = a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0$

$= a_2 + a_1 + 2$

$\Rightarrow a_2 + a_1 = -1$ (2)

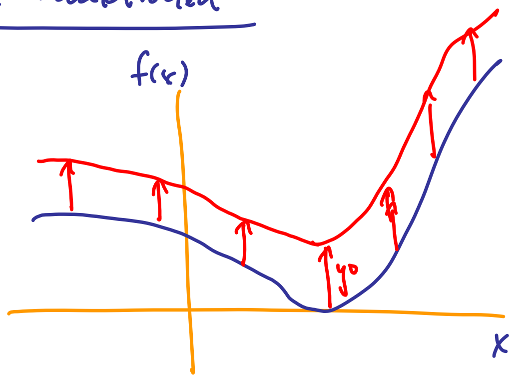
(1) + (2): $2a_2 = -4 \Rightarrow a_2 = -2$

(2) − (1) $2a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = 1$

Verschieben, Strecken von Graphen v. Funktionen

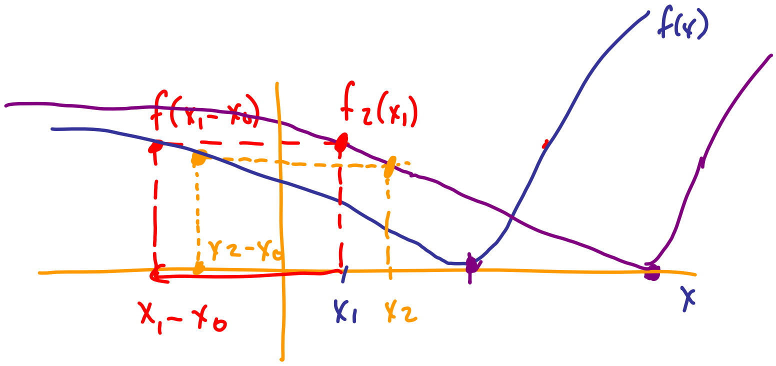
Verschieben in y-Richtung:

$$f_1(x) = f(x) + y_0$$



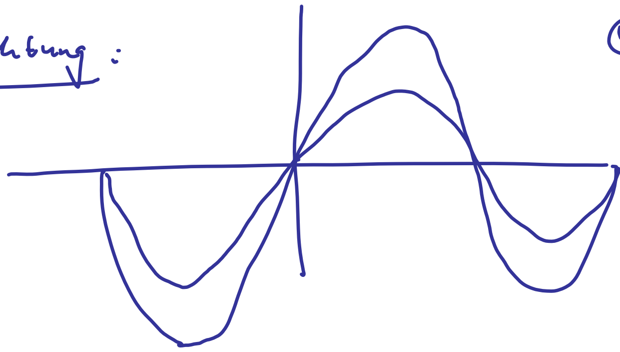
Verschieben in x-Richtung: $(x_0 > 0)$

$$f_2(x) = f(x - x_0)$$



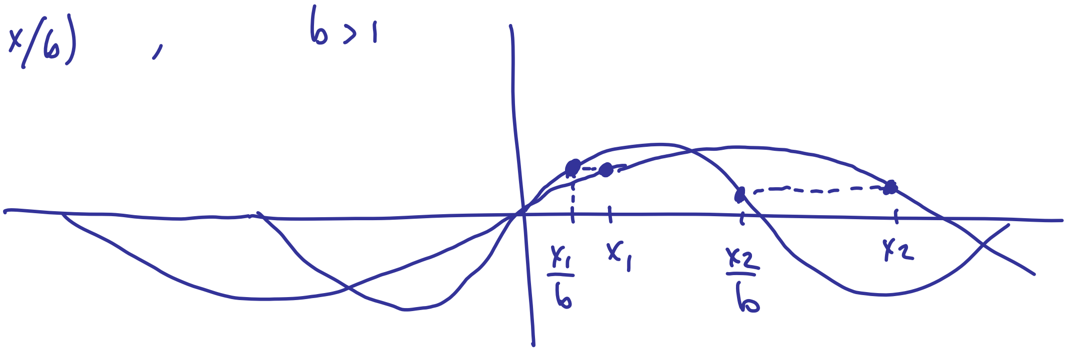
Strecken um einen Faktor in y-Richtung:

$$f_3(x) = a f(x)$$



Strecken um Faktor in x-Richtung:

$$f_4(x) = f(x/b) \quad , \qquad b > 1$$



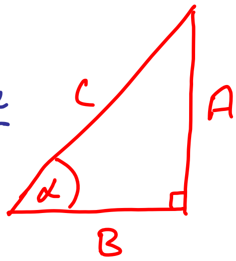
Kombinationen: $f_5(x) = a f\left(\frac{x - x_0}{b}\right) + y_0$

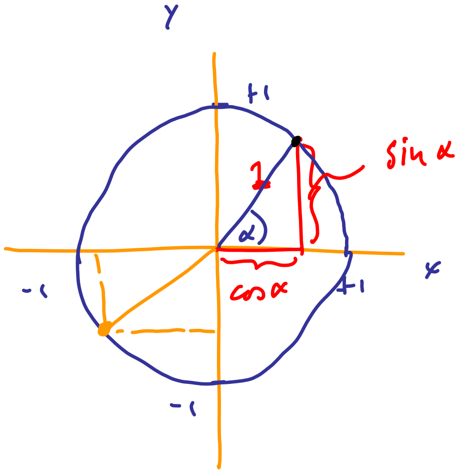
nicht gleich!! $f_6(x) = a\left[f\left(\frac{x}{b} - x_0\right) + y_0\right]$

1.4.4 Trigonometrische Funktionen

Im rechtwinkligem Dreieck:

$$\sin\alpha \equiv \frac{A}{C} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$





$$\cos\alpha \equiv \frac{B}{C} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

Pythagoras: $A^2 + B^2 = C^2 \Rightarrow \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2} = 1$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Def: Sinusfunktion $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ $\mathbb{R}$

$x \longmapsto \sin x$, mit $\sin(x) = \sin(x + n2\pi)$

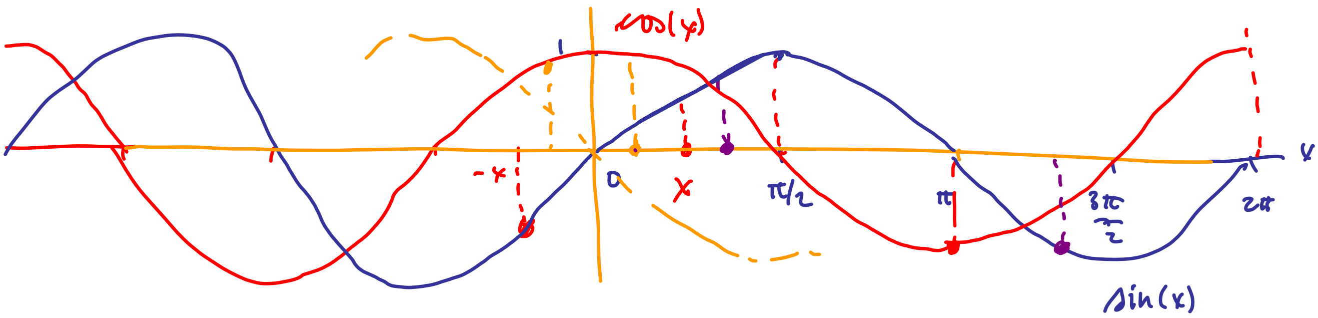
$n \in \mathbb{Z}$

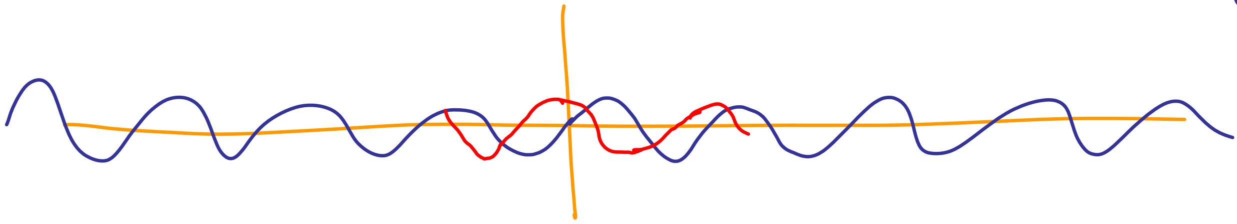
Cosinusfunktion $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ $\mathbb{R}$

"periodische Fortsetzung"

$x \longmapsto \cos x$, mit $\cos(x) = \cos(x + n2\pi)$

$360° = 2\pi$





Sin & cos sind periodische Fktn, mit Periode 2π.

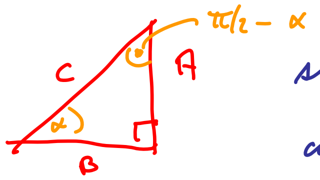
Allg: "periodische Fkt" hat Periode L falls: $f(x+L) = f(x)$ $\forall x$.

$\sin(-x) = -\sin(x)$ ("punktsymmetrisch zum Ursprung")

$\cos(-x) = \cos x$ ("Achsensymmetrisch zur y-Achse")

$\sin(\pi/2 - x) = \cos x = B/C$

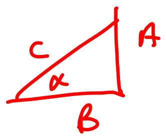
$\cos(\pi/2 - x) = \sin x = A/C$



$\sin(x+\pi) = -\sin x$

$\cos(x+\pi) = -\cos x$

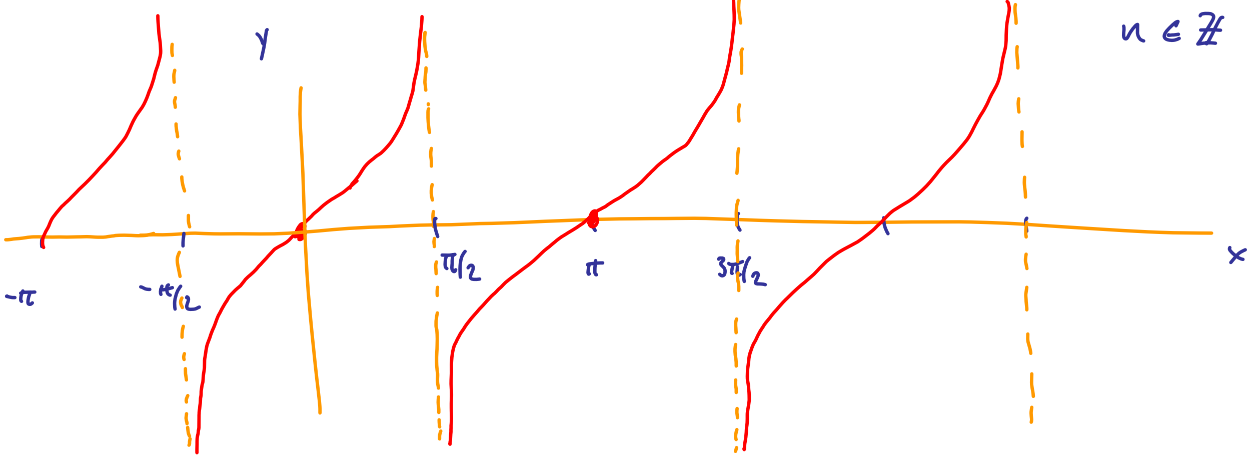
Tangens:



$$\tan\alpha = \frac{A}{B} = \frac{(A/C)}{(B/C)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$f: \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{\text{Nullstellen des Cosinus}\}}_{\pi/2 + m\pi,\ m \in \mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

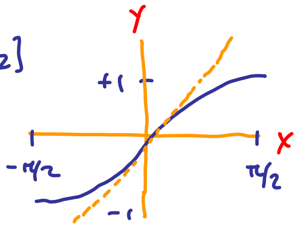
$$x \longmapsto \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{mit } \tan(x) = \tan(x + \cancel{2}\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$



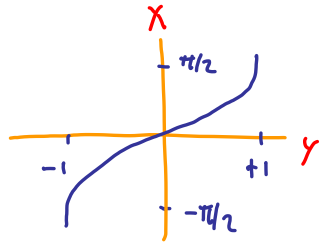
Umkehrfunktionen v. Trig. Funktionen: (17)

Sin, Cos, Tan, sind im gesammten Def-Bereich nicht umkehrbar, wohl aber in Teilbereichen, wo sie monoton sind.

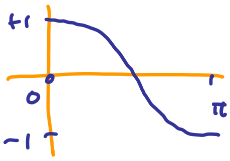
sin in $[-\pi/2, \pi/2]$



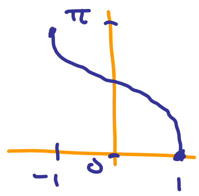
arsin "Arcsinus"



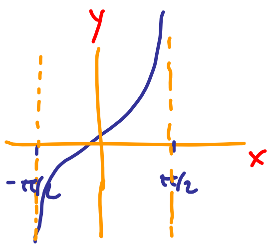
cos in $[0, \pi]$



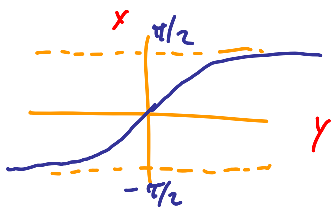
arcos "Arcosinus"



tan in $[-\pi/2, \pi/2]$



arctan "Arc tangens"



(18)

$$\arcsin[\sin(x)] = x$$

$$\arccos[\cos(x)] = x$$

Bsp: $x = \pi/2$, $\sin x = 1$

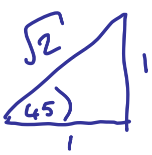
$\arcsin 1 = \pi/2$ ✓

Additionstheoreme:

$$\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \sin B \cos A$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \sin B$$

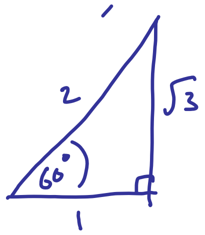
Spezielle Winkel: $\alpha = 45°$, $\alpha = \pi/4$



$$\Rightarrow \sin \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

19

$\alpha = 60^\circ$, $\alpha = \pi/2 \cdot 2/3 = \pi/3$



$$\sin \pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \pi/3 = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x + \pi/3) = \sin x \cos \pi/3 + \sin \pi/3 \cos x$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$$

20

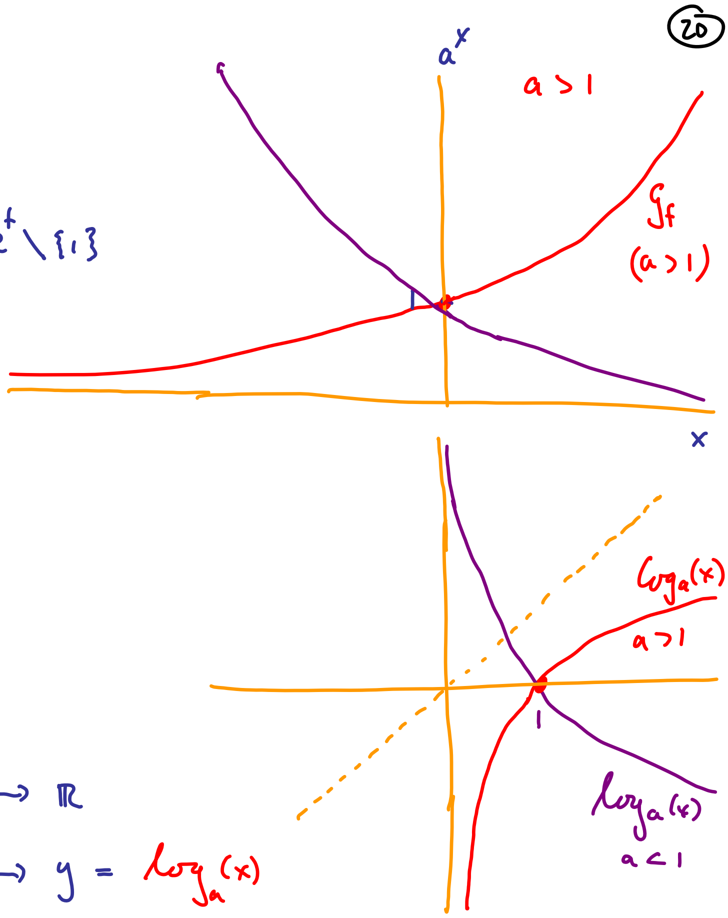
1.4.5 Exponentialfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto y = a^x, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$a > 1$: $a^x \xrightarrow{x \to \infty} \infty$, $\quad a^x \xrightarrow{x \to -\infty} 0$

$a < 1$: $a^x \xrightarrow{x \to \infty} 0$, $\quad a^x \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$



Umkehrfunktion: $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto y = \log_a(x)$$

Beispiel: Gegeben: $y = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1 + (x/a)^2}\right)$ (21)

↑ natürlich Logarithmus:

Finde Umkehrfunktion! (also, finde x als Funktion von y).

Startpunkt: $e^y = e^{\ln\left(x/a + \sqrt{1+x^2/a^2}\right)} = x/a + \sqrt{1 + x^2/a^2}$

$$e^y - x/a = \sqrt{1 + (x/a)^2}$$

$$(e^y - x/a)^2 = 1 + x^2/a^2$$

$$-(e^y)^2 + 2e^y \cdot \frac{x}{a} + \cancel{\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)} = -1 + \cancel{(-x^2/a^2)}$$

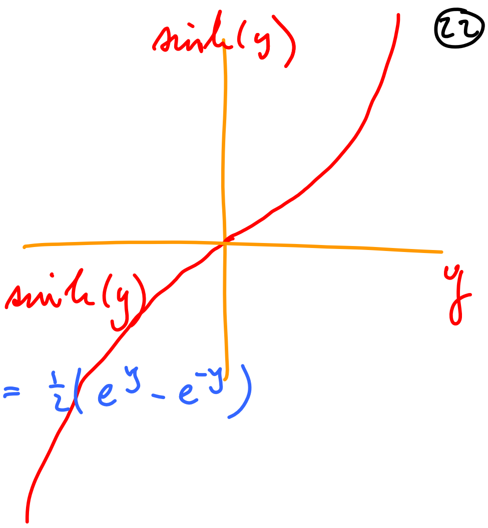
$$2e^y \frac{x}{a} = e^{2y} - 1$$

(22)

$$\frac{x}{a} = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \frac{1}{2}(e^{2y} - 1)e^{-y}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2y-y} - e^{-y})$$

$$x = a\,\underbrace{\tfrac{1}{2}(e^y - e^{-y})}_{\equiv \sinh(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})} = a \sinh(y)$$



$\sinh(y)$ = "Sinus Hyperbolicus"

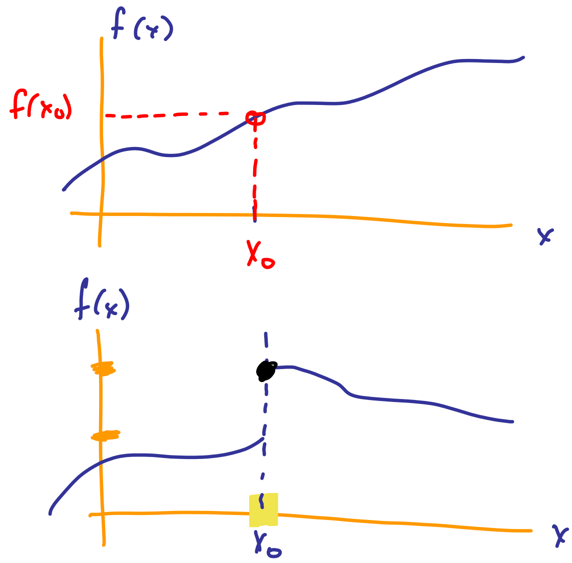
$$x = a \sinh(y)$$

$$\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \sinh^{-1}(\sinh y)) = y = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1 + (x/a)^2}\right)$$

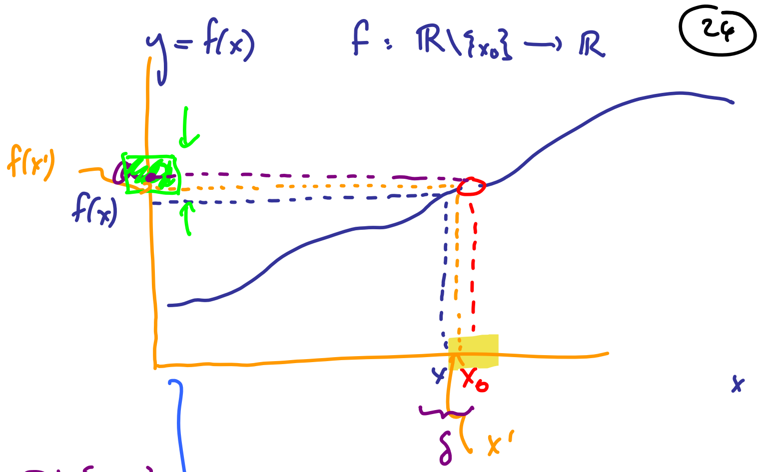
Es gilt übrigens: $\sin y = \frac{1}{2}(e^{iy} - e^{-iy})$ $\quad i = \sqrt{-1}$

2. Grenzwerte

2.1. Allgemeine Grenzwerte



Gegeben sei eine Funktion f und ein Wert $x_0 \in \mathbb{R}$, und ein x-Wert, dessen Umgebung in D_f liegt:



es gibt $\delta > 0$, so, daß

$$]x-\delta, x+\delta[\subset D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$$

Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 einen Grenzwert, a, falls es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle

$x \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$, gilt: $f(x) \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

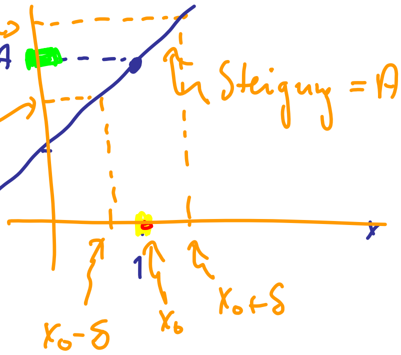
Beispiel: $f(x) = A \frac{x^2-1}{x-1}$ " $= \frac{A(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = A(x+1)$ "

Grenzwert: $x \to x_0 = 1$?

Antwort: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 2A$

$2A + \varepsilon = f(x_0+\delta)$
$= A(x_0+\delta+A$

$\underline{2A} - \underline{\varepsilon} = f(x_0-\delta)$
$= A(x_0-\delta)+A$
$= \underline{A} - \underline{A\delta} + \underline{A}$



"Beweis": Für $\varepsilon > 0$, wähle $\underline{\underline{\delta = \varepsilon/A}}$,

dann gilt für alle $x \in \,]1-\delta, 1+\delta[\, \setminus \{1\}$, dass $f(x) = A(x+1)$

Somit: $f(x) \in \,]f(1-\delta), f(1+\delta)[$

$= \,]A(1-\delta+1), A(1+\delta+1)[$

$= \,]A(2-\delta), A(2+\delta)[\;=\;]2A-\varepsilon, 2A+\varepsilon[$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2A$

$\Uparrow$

Beispiel, wo Grenzwert nicht existiert: $\frac{1}{x}$