Komplexe Zahlen

8.10.2013

$x^2 = \sqrt{2}$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar!

Lösung: erweitere $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$

Problem: $x^2 = -1$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar!

Frage: Läßt sich $\mathbb{R}$ so erweitern, dass $x^2 = -1$ lösbar ist?

Postulat: Erweitere $\mathbb{R}$ um eine "imaginäre Einheit",

$$i \equiv \sqrt{-1}, \quad \text{so dass} \quad i^2 = -1$$

Um rechnen zu können, benötigt man die üblichen Rechenregeln, insbesondere, alle reellen Zahlen, all reellen Vielfachen von i, und die Kombination daraus, $\underbrace{a + ib}_{\equiv \text{"komplexe Zahl"}}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

---

(2)

Def: Addition: $(a+ib) + (c+id) \equiv (a+c) + (b+d)i$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Def: Multiplikation: $(a+ib)\cdot(c+id) = ac + a(id) + (ib)c + (ib)(id)$

$$= ac + iad + ibc + \underbrace{i^2}_{=-1} bd$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Zuordnung: $a + ib \longmapsto (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$i \longmapsto (0,1) \in \mathbb{R}^2$

Raum aller komplexen Zahlen: $\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$

"Realteil": $\operatorname{Re}(z) = x$, "Imaginärteil": $\operatorname{Im}(z) = y$

Def: $\mathbb{R}^2$ mit folgenden Rechenregeln ist äquivalent zu $\mathbb{C}$: ③

Addition: $(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$

Multiplikation: $(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$

Behauptung: mit diesen Rechenregeln enthält $\mathbb{R}^2$ eine Lösung für

$$z^2 = (-1, 0)$$

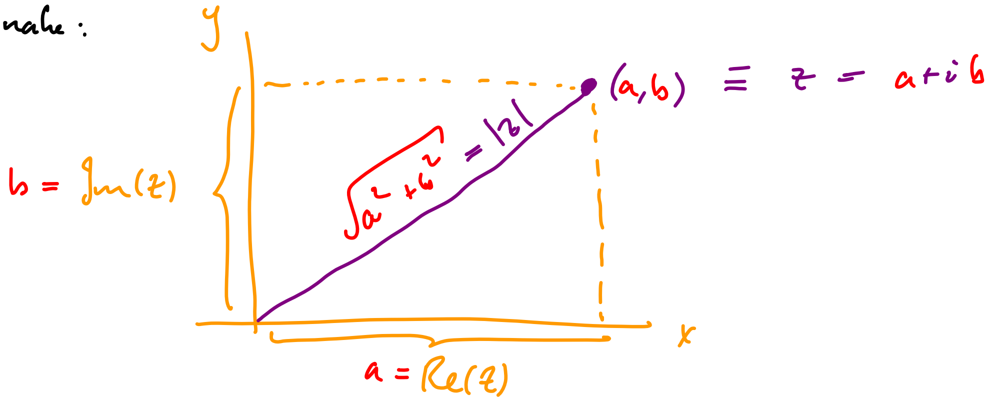
Denn: $z \equiv (0,1)$:

$$z^2 = (\overset{a}{0}, \overset{b}{1}) \cdot (\overset{c}{0}, \overset{d}{1})$$

$$= (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0)$$

$$= (-1, 0) \text{ entspricht } -1$$

Die Korrespondenz zwischen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ legt eine graphische Darstellung nahe: ④



<u>Inverse Element von $a+ib$?</u> $a \neq 0$ oder $b \neq 0$

Betrachte
$$\frac{1}{a+ib} = \frac{1}{(a+ib)}\frac{(a-ib)}{(a-ib)} = \frac{a-ib}{(aa - b(-b)) + (\underbrace{a(-b) + ba}_{=0})i}$$

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\, i$$

Check: $\frac{1}{a+ib}\cdot(a+ib) = \left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right)\cdot(a+ib)$

$$= \frac{1}{(\cancel{a^2+b^2})}\Big[\underbrace{\big(a^2-(-b)b\big)}_{\cancel{a^2+b^2}} + i\,\underbrace{\big(ab+(-b)\cdot a\big)}_{0}\Big]$$

$$= 1$$

Def: "Komplex Konjugierte Zahl" zu $z = a+ib$

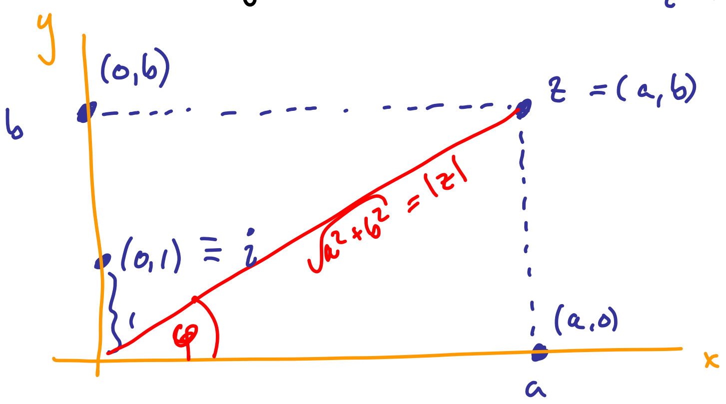
ist $\bar{z} \equiv z^* \equiv a-ib$

$$z\cdot\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 \geq 0 \in \mathbb{R}$$

Def:

"Betrag von z": $|z| \equiv \sqrt{z\cdot\bar{z}}$

generelle geometrische Deutung in "komplexen Ebene" $z = a+ib$



$\mathrm{Re}(z) = a = |z|\cos\varphi$

$\mathrm{Im}(z) = b = |z|\sin\varphi$

$\Longleftrightarrow$ $z = a+ib$

$= |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi$

$= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$|z| \in [0,\infty[\subset \mathbb{R}$

$\varphi \in [0,2\pi[\in \mathbb{R}$

"Polardarstellung" einer komplexen Zahl.

Multiplikation komplexer Zahlen in Polardarstellung

$$z_1 = a_1 + i b_1 = \overbrace{|z_1|}^{r_1}\left(\overbrace{\cos\varphi_1}^{c_1} + i\,\overbrace{\sin\varphi_1}^{s_1}\right) = r_1(c_1 + i s_1)$$

$$z_2 = a_2 + i b_2 = \underbrace{|z_2|}_{r_2}\left(\underbrace{\cos\varphi_2}_{c_2} + i\,\underbrace{\sin\varphi_2}_{s_2}\right) = r_2(c_2 + i s_2$$

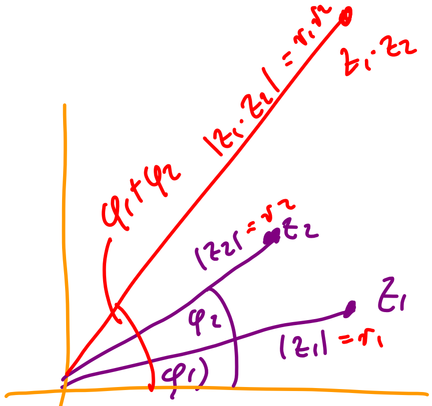
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

$$= r_1(c_1 + i s_1) \cdot r_2(c_2 + i s_2)$$

$$= r_1 \cdot r_2 \left[(c_1 c_2 - s_1 \cdot s_2) + i(c_1 s_2 + s_1 c_2)\right]$$

$$= r_1 r_2 \left[\left(\underbrace{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)}\right) + i\left(\underbrace{\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}\right)\right]$$

$$= (r_1 r_2)\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$$



Wünsche:

- Partialbruchzerlegung
- Reihendarstellungen
- Matrizen
- Integration

Eulerformel: $e^{i\pi} + 1 = 0$